TECHE
UDINE

MANOSCRITTI

FONDO PRINCIPALE

Manoscritto n. **P_MSS_1029_III**

Nel Fondo Principale sono confluiti la maggior parte dei lasciti manoscritti pervenuti alla Biblioteca Civica «Vincenzo Joppi» nel corso del tempo: si tratta perciò di un fondo composito nel quale è possibile trovare manoscritti di argomento liturgico, scientifico, giuridico, botanico e altro.

Collocazione:

Biblioteca Civica "Vincenzo Joppi", Udine
https://www.techeudine.it/fondo-principale
https://www.sbhu.it/

III

MSS.CON.
GIORDA
RICCATI
MECCAN
IDROS.

1029

BIBLIOTECA COMUNALE
VINCENZO JOPPI
UDINE
N. 1029 III

Dissertazioni, e scritti inediti
del Conte Giordano Riccati
appartenenti
alla Meccanica, ed alla Idrostatica

Indice delle cose contenute in questo Volume

1. Esame dell'Ipotesi, che nel moto accelerato le velocità accettino le ragioni degli spazj — pag. 3.
2. Determinare col mezzo delle forze continuamente applicate la communicazione diretta frai corpi molli, ed elastici. — 13.
3. Dimostrazione della legge dell'equilibrio — 35.
4. Soluzione del problema inverso delle forze centrali — 51.
5. Lettera sopra la forza centrifuga — 63.
6. Della riduzione di alcune formole alle misure comuni — 77.
7. Lettera al Sig.r Ab. Giuseppe Contarelli — 103.
8. Determinare la forza necessaria, perchè la ruota d'un carro &c. 121.
9. Determinare quell'arco di cerchio, il cui diametro sia verticale &c. 129.
10. Determinare il tempo, in cui &c. — 143.
11. Soluzione d'un problema proposto da Niccolò Bernoulli — 165.
12. Soluzione di due problemi Meccanici — 173.
13. Soluzione di due problemi Meccanici — 190.
14. Soluzione di due problemi Meccanici — 199.
15. Delle compressioni dell'aria — 215.
16. Spiegazione d'una sperienza — 229.
17. Annotazioni allo Schediasma XXXI — 237.
18. ~~[illegible]~~ (tolto ?) — ~~[illegible]~~.
19. Determinare la velocità, colla quale l'acqua esce da un foro. — 273.
20. Determinare la forza viva dell'acqua contenuta nel Sorgo — 309.
21. Determinare col mezzo d'un Pendolo la velocità dell'acqua corrente — ~~[illegible]~~
22. Annotazioni alla memoria del Signor Teodoro Bonati — 333.
23. Riflessioni intorno alle Memorie del Cav. Lorgna de' Navigli a remi — 339.
24. Riflessioni intorno alla Teoria del Cav. Lorgna del moto de' Liquidi &c. — 347.
25. Soluzione di alcune proposizioni contenute nei saggi di Statica, e di Meccanica del Signor Cav. Lorgna — 359.
26. Osservazioni sopra l'esperienza III. del Signor Paolo Delanges — 391.
27. Avvertenze sopra l'opera del Signor Ab. Mascheroni — 411.
28. Delle Altezze Barometriche — 423.
29. Degli Elastri di massa finita — 437.

BI

N.

E

Dissertazioni, Scritti,
e
Problemi Meccanici.

B

[illegible]

Esame dell'ipotesi che nel moto accelerato le velocità accattino la ragione degli spazj passati ~

Esame dell'ipotesi, che nel moto accelerato le velocità accettino la ragione degli spazj passati.

Sono note le varie strade calcate dagli Scrittori per provare assurda l'ipotesi, che nel moto accelerato le velocità stiano come gli spazj passati. In tale supposizione (chiamato s lo spazio, u la velocità, t il tempo) abbiamo $s = au = \frac{a\,ds}{dt}$, e perciò $dt = \frac{a\,ds}{s}$; ed integrando $t = \log. s$ nella logistica della suttangente $= a$; e preso il nulla come protonumero, dovendo ad $s = 0$ corrispondere $t = 0$.

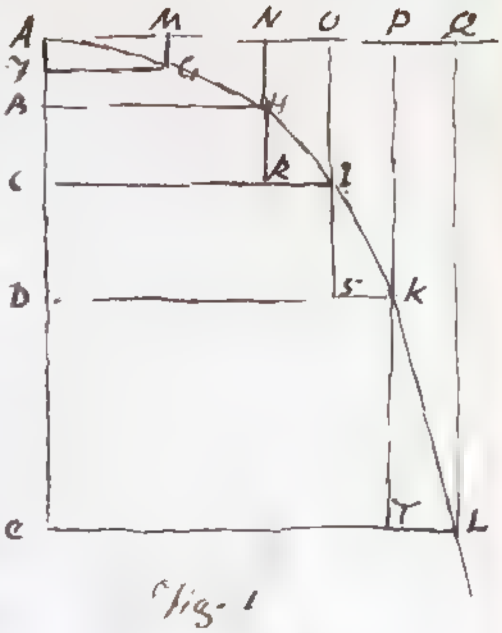


fig. 1

Descritta la logistica AGIL (fig. 1) colla suttangente $= a$, in cui le assisse $AY = MG = s$, e le ordinate $YG = AM = t$, egli è chiaro che a scorrere il menomissimo spazio AY non ci vuol meno di un tempo $YG = AM$ trascendentemente infinito, stando il nulla ad AY in ragione immensamente minore di qualunque data, ed ad una tal ragione fra gli spazj competendo per la natura della logaritmica un logaritmo infinito. Un tempo ancora maggiore si richiederà per passare lo spazio $AB = NH = 1$.

Si supponga passato cotale spazio, e sia $AC = OI = 2$, $AD = PK = 4$, $AE = QL = 8$ e per la proprietà della logistica saranno eguali i tempi ~~fra cui si percorrono gli spa~~zj NO, OP, PQ, in cui si percorrono gli spazj $BC = HR = 1$; $CD = IS = 2$, $DE = KT = 4$. Continuata questa serie geometrica sino al nulla, onde si abbia

$4, 2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}$ &c.

consta essa di infiniti termini dinotanti

altrettanti

$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}$ &c.

altrettanti spazj, i quali si passano in tempi ciascuno eguale ad NO. È dunque infinito il tempo AN, in cui il mobile, cominciando dalla quiete, viaggia per lo spazio AB = 1, e similmente infinito si scoprirà il tempo impiegato nello scorrere qualunque picciolissimo spazio A7. E quindi deducesi, che nelle ipotesi esaminata il corpo non farà moto; perchè a passare un menomissimo spazio non ci vorrebbe meno di un tempo infinito.

Fig. 2

Divisi due spazj (fig. 2) AE, A'E', il primo de' quali sia doppio del secondo, in egual numero di parti eguali, per esempio in quattro, egli è certo che le coppie di spazj DE, D'E'; CD, C'D'; BC, B'C' si passeranno nello stesso tempo, cioè DE nello stesso tempo di D'E', CD nello stesso tempo di C'D', ecc. BC nello stesso tempo di B'C'. Imperciocchè essendo la velocità in D doppia della velocità in D', il menomo spazio Dd sarà doppio dello spazio D'd' scorso nello stesso tempicello; il che avverandosi di tutti i susseguenti spazietti, ne segue che gli spazj finiti DE, D'E' si passeranno nel medesimo tempo. Lo stesso succede anche negli spazj CD, C'D'; BC, B'C', perchè la velocità in C è doppia di quella in C', la velocità in B è doppia di quella in B'. Non può affermarsi altrettanto degli ultimi spazj AB, A'B', in riguardo ai quali la velocità in B è bensì doppia di quella in B', ma le velocità tanto in A, quanto in A' sono eguali a nulla. Tagliato in due parti eguali A7, 7B lo spazio AB; gli spazj

A7

A 7 ; A′B′, nei quali sono pari tutte le circostanze, si percorrono nello stesso tempo, il che parimente verificasi dagli spazj 7 B, B′C′. Quindi gli spazj AB, A′C′ si passano in pari tempi, e perciò il tempo per AB supera il tempo per A′B′ per quel tempo, che si impiega a scorrere lo spazio B′C′. Poichè gli spazj AC, A′C′; CD, C′D′; DE, D′E′ si passano in tempi eguali; agevolmente si cava la conseguenza che il tempo per AE supera il tempo per A′E′ per una misura di tempo pari a quella, con cui il tempo per AB eccede il tempo per A′B′. Supponeva non rettamente il Galileo, che gli spazj AE, A′E′ si percorressero in tempi eguali: ma egli è certo che nel passare gli eguali spazj AC, A′E′ si spende ugual tempo; dunque il moto per CE esser dovrebbe istantaneo.

Ho testè dimostrato che il tempo per AE supera il tempo per A′E′ per quel tempo, in cui si scorre lo spazio B′C′ uguale al tempo, in cui si passa lo spazio AC: ma gli spazj uguali AC, A′E′ si percorrono in pari tempo; dunque per lo spazio CE viaggia il mobile nel tempo uguale a quello, in cui si passa lo spazio BC. Che i tempi per gli spazj BC, CE siano uguali, si deduce chiaramente da ciò, che in B la velocità è la metà di quella in C, e la velocità in C è la metà di quella in E, e quindi come ho provato di sopra, gli spazj BC, CE si passano nel medesimo tempo. Lo spazio dunque CE non si scorre istantaneamente, ma bensì in tempo finito, e perciò svanisce l'assurdo supposto dal Galileo.

Il vero assurdo delle ipotesi, che le velocità stiano come gli spazj, l'ho notato al principio,

e

e consista in ciò, che a viaggiare per uno spazio, benchè menomissimo, si richiederebbe un tempo trascendentemente infinito.

La supposizione, che ho preso ad esaminare, esige che la forze acceleratrici ricevano la ragione degli spazj, onde si abbia $fds = sds = udu$, e perciò $s = u$, ch'è quanto a dire le velocità proporzionali agli spazj scorsi. Ne segue che ad $s = 0$ corrispondendo la forza $s = 0$, il corpo non si porrebbe in moto. La stessa conseguenza si deduce dalla costruzione, che m'insegna esser necessario un tempo trascendentemente infinito per passare un piccolissimo spazio.

~~Si può scusare in qualche maniera lo sbaglio del Galileo riflettendo, che~~

Pretende il ch. Sig. Ab. Andres nel Tomo I. della Raccolta Ferrarese di validamente difendere la supposta dimostrazione del Galileo, colla quale prova, che nell'ipotesi delle velocità proporzionali agli spazj il moto per CA esser dovrebbe istantaneo. Nota cosa è, dic'egli, che il grave moventesi con moto accelerato acquista alla fine del suo moto velocità da correre in ugual tempo con moto equabile doppio spazio, cioè a dire il corpo A uno spazio doppio di AC, il corpo A' uno spazio doppio di A'C': ma stando le velocità in C, C' come AC : A'C' come 2 : 1 i prodotti spazj si passano equabilmente in pari tempo; dunque si eguaglia altresì il tempo, in cui con moto accelerato si sono percorsi gli spazj AC, A'C'. E poichè gli spazj AC, A'C' si sono senza dubbio passati in tempi uguali; egli è

manifesto

manifesto, che il tempo per CG esser dava istantaneo.

Il difetto del raziocinio del Sig. Ab. Andreas dipende da ciò, che generalmente suppone, che il grave moventesi con moto accelerato acquisti alla fine del suo moto velocità da correre in ugual tempo con moto equabile doppio spazio. Essendo $u = \frac{ads}{dt}$, ne risulta $udt = ads$, ed integrando, $\int udt = as$. Nell'ipotesi della gravità costante abbiamo $u = t$, e perciò ~~conseguenza~~ $\int udt = \int tdt = \frac{t^2}{2} = as$: ma colla velocità costante $u = t$ si passa nel tempo t lo spazio $ut = t^2$; dunque lo spazio passato con moto equabile è doppio di quello trascorso in pari tempo con moto accelerato = Questa conseguenza è soltanto propria dell'ipotesi, che le velocità stieno come i tempi.

Nel nostro caso, in cui $u = s$, lo spazio (fig: 1) $MG = AD = s$ passato con moto accelerato sta allo spazio passato equabilmente colla velocità acquistata nel punto D come haja $MGAM = \int udt = \int sdt$ al rettangolo $MGDAM = ut = st$. E poichè $dt = \frac{ads}{u} = \frac{ads}{s}$, e $t = \log. s$ nella logistica della suttangente $= a$; scopriremo $MGAM = \int sdt = \int ads = as$, $MGDAM = st = s.\log.s$, e quindi $MGAM : MGDAM :: a : \log. s$, ossia come la costante a ad $AM = \log. s = t$. Or avendo dimostrato, che quantunque $MG = s$ sia menomissima, è sempre $AM = \log. s = t = \infty$; ne segue, che lo spazio AD allo spazio scorso equabilmente colla velocità acquistata in D si riferirà non come $1 : 2$, ma bensì

come

come la costante a all' infinito.

Sia $MG = \frac{1}{n}$, $NH = 1$, $AM = \infty$, $NO = b$. Facciasi $a : AM = \infty :: MG = \frac{1}{n} : \frac{\frac{1}{n}\infty}{a}$

$a : AN = \infty + b :: NH = 1 : \frac{\infty + b}{a}$,

ed $\frac{\frac{1}{n}\infty}{a}$; $\frac{\infty+b}{a}$ saranno gli spazj passati equabilmente colla velocità acquistata nello scorrere con moto accelerato gli spazj $AZ = \frac{1}{n}$; $AB = 1$ nei tempi $AM = \infty$, $AN = \infty + b$. Infatti stando nel moto equabile le velocità u, U come gli spazj divisi per i tempi, avremo

$$u : U :: \frac{\frac{1}{n}\infty}{a.\infty} : \frac{\infty+b}{a.(\infty+b)} :: MG = \frac{1}{n} : NH = 1,$$

cioè rettamente come gli spazj scorsi $MG = \frac{1}{n} : NH = 1$. Se dunque lo spazio AZ si scorre con moto accelerato nel tempo $AM = \infty$, lo spazio ZB si passerà nel tempo $MN = b$, e non istantaneamente, come si è affermato dal Galileo. Questo illustre Scrittore avrebbe rettamente conchiuso, se fosse finito, ed eguale a k il tempo per AZ. Imperciocchè facciasi $\infty = \frac{b}{0} : b :: k : 0$, e si troverà nullo il tempo per ZB.

Determinare col mezzo della formola
della forza continuamente applicata
la comunicazione diretta del moto
fra i corpi molli, ed elastici.

Determinare col mezzo delle formole delle forze continuamente applicate la comunicazione diretta del moto fra i corpi molli, ed elastici

Conciossiachè quella forza media, col di cui mezzo si effettua la comunicazione del moto fra due corpi, agisce, o reagisce per lo stesso spazio, per cui si move il corpo, egli è indifferente l'usare o la formola fds = media, o la formola fdt = medu. Io mi appiglierò a questa, e perchè come vedremo, nel presente incontro con somma facilità si maneggia, e perchè di quella si è servito sciogliendo lo stesso Problema nel Tomo V. dei Comentarj di Pietroburgo il dottissimo Sig.r Leonardo Eulero.

Il corpo A colla velocità V urti direttamente nel corpo B, che si move colla velocità $\pm U$. Sia f la forza media, per opera della quale si effettuà la comunicazione del movimento, e dopo chi essa ha esercitata azione, o reazione per il tempo t sia v la velocità del corpo A, u la velocità del corpo B. Ritardandosi il corpo A, ed accelerandosi il corpo B relativamente alla direzione da A verso B, avremo $fdt = -Adv$, $fdt = Bdu$, ed integrando $Sfdt = AV - Av$, $Sfdt = Bu \mp BU$. Si aggiungono le costanti AV, $\mp BU$, a cagione che ~~incominciata~~ ~~tempicello~~ nel primo istante dell'urto, quando $Sfdt = 0$, è $Av = AV$, $Bu = \pm BU$. Ma $Sfdt = Sfdt$; perchè in un dato tempicello la stessa forza spinge e il corpo A, e il corpo B; dunque $AV - Av = Bu \mp BU$, e perciò $AV \pm BU = Av + Bu$.

La comunicazione fra i corpi molli è compiuta, quando procedono con pari velocità, onde sia $v = u$, e quindi chiamando w una tale velocità, troveremo $\frac{AV \pm BU}{A + B} = w$

Mentre corrono insieme due corpi, in pari tempo si forma, e si restituisce la contusione. La contusione è compiuta, quando i corpi camminano ~~procedono~~ unitamente con eguale velocità: la contusione è restituita, quando è terminata la comunicazione del moto fra

i corpi

i corpi elastici. Si cavi la conseguenza, che se un dato tempo si spende nella comunicazione del moto fra i corpi molli, un doppio tempo ci vuole, acciocchè si comunichi il moto fra i corpi elastici, serbata per altro la condizione, che questi corpi siano egualmente rigidi, e della stessa massa, e forza. In oltre giacchè e nel chiudersi, e nell'aprirsi della elastro, che si suppone di mezzo fra i due corpi, quando esso è egualmente costipato, è fornito nell'uno, e nell'altro incontro di pari ~~velocità~~ forza, dobbiam dedurre, che in que' due tempi eguali, che passano dal principio della comunicazione del moto sino al suo compimento nella ipotesi, che i corpi sien molli, né si restituisca l'elastro, e da un tale istante sino a che si perfeziona la comunicazione del moto, supposto che la molla si restituisca, ed i corpi siano elastici, si esercitano pari $S f dt$; di modo che in ambo i casi si generano, o si consumano eguali quantità di moto.

Le verità enunciate si possono così dimostrare. Dalla scoperta formola $\frac{AV \pm BU}{A+B} = \varpi$ si ricava, che se due corpi molli si vengono incontro con eguali quantità di moto, compiuto l'urto si fermano. Ciò interviene, perchè esercitandosi contro amendue i corpi, pari $S f dt$ in tempo pari, perdono essi le eguali quantità di moto, onde erano animati. Egli è facile da vedersi, che aprendosi l'elastro, seguiranno a destra, e a sinistra tali $S f dt$, che saranno non solo eguali tra loro, ma che altresì pareggeranno quella, che si sono poste in opera nel serrare l'elastro. Ho già detto, che l'elastro nel chiudersi, e nel riaprirsi è fornito della stessa forza f, quando la costipazione è pari nell'una, e nell'altra circostanza. La doppia azione $f dt$ della forza f contro i corpi A, B fa che nel primo tempicello dt della dilatazione della molla ricuperino le quantità eguali di moto

moto $A\,dv$; $B\,du$, che avevano perdute nell' ultimo tempicello della costipazione ~~dilatazione~~ per motivo delle eguali pressioni $f\,dt$. Colla velocità dv il corpo A, e colla du il corpo B andando, e ritornando scorre il medesimo spaziatto; e perciò prima di scorrerlo nell' andata, e dopo averlo scorso nel ritorno, l' elastro soggiace a pari compressione, ed ha la stessa forza f. Per l' azione $f\,dt$ di questa forza, che si esercita da una parte, e dall' altra, nel secondo tempicello dell' aprimento dell' elastro i corpi A, B riacquistano la quantità di moto $A\,dv$, $B\,du$, che l' eguale pressione $f\,dt$ aveva loro fatto perdere nel penultimo tempicello della costipazione. Si seguiti l' ordine del discorso, e si comprenderà, che a pari costipazioni dell' elastro corrisponde nelle masse A, B, che vanno, e che ritornano, la stessa quantità di moto, che in pari tempo si discapita, e si riguadagna; di modo che in tempo eguale, e con azione eguale alla pressione i corpi A, B ricuperano la perduta quantità primitiva ~~di movimento~~, benché per direzione contraria, la quantità primitive del moto, riacquistate ~~ricuperate~~ le quali cessa l' azione, essendosi ridotto l' elastro alla naturale lunghezza.

Si intendano ora collocati dentro una nave i due corpi, che vengono all' urto con eguali, e contrarie quantità di moto, ed alla nave stessa si può imprimere tale velocità o per la direzione dell' corpo A, o per l' opposta, che relativamente allo spazio immobile i corpi si incontrino con velocità in qualunque proporzione, o per la stessa, o per contraria direzione. Ma o stia ferma, o si muova la barca, segue sempre la medesima ammaccatura, la quale si forma, e si restituisca in tempi eguali, ed esercitandosi eguali $f\,dt$; dunque ciò interviene in riguardo a tutte le specie delle comunicazioni del moto, che si effettuano relativamente allo spazio immobile: il che ~~[illegible]~~

Ciò

Ciò dimostrato proseguisco il cammino, e dico, che se $\int f dt$ nel tempo, che passa dal principio della comunicazione del moto sino al suo compimento colle leggi dei corpi molli, ha scemato la quantità del moto nel corpo A per la grandezza $AV - Ax$, per una pari quantità la scemerà l'eguale $\int f dt$, nell'egual tempo, che passa dall'istante nominato, sinattantochè si compie la comunicazione del moto colle leggi dei corpi elastici. Perciò sottratta dalla quantità di moto Ax la grandezza $AV - Ax$, ne risulterà la quantità di moto $2Ax - AV$, di cui è dotato il corpo A, finita che sia la comunicazione del moto fra i corpi elastici A, B, e quindi la sua velocità avrà il seguente valore, cioè $v = 2x - V$: ma $x = \frac{AV \pm BU}{A+B}$; dunque

$$v = \frac{2AV \pm 2BU}{A+B} - V = \frac{\overline{A-B}\cdot V \pm 2BU}{A+B}.$$

Non altrimenti il corpo B nel principio della comunicazione avea la quantità di moto $\pm BU$, e finita la comunicazione colle leggi dei corpi molli la quantità Bx; dunque la quantità di moto guadagnata si è $Bx \mp BU$. Un pari accrescimento succede nel passare dalla velocità giusta il canone dei corpi molli a quella giusta il canone dei corpi elastici; e quindi in tale circostanza si scoprirà la quantità del moto nel corpo B eguale a $2Bx \mp BU$, e la sua velocità $u = 2x \mp U$. Sostituendo in cambio di x il suo valore, ci si presenterà $u = \frac{\overline{B-A}\cdot \pm U + 2AV}{A+B}$: il che &c.

Quantunque non sia nota la scala delle forze f relativamente ai tempi t, o agli spazj s, dipendendo essa dalla varia materia e figura dei corpi A, B; ciò non ostante indipendentemente dalla detta scala si verificherà sempre, che terminata la comunicazione del moto o fra i corpi molli, o fra i corpi elastici,

si

si movano essi colla velocità, che per me sono state determinate. In oltre assegnata al corpo B una velocità qualunque media fra l'iniziale, e quella che gli compete, compiuta che sia la perturbazione del moto, la formola $AV \pm BU = Av + Bu$ mi insegna qual velocità $v = \frac{AV \pm BU - Bu}{A}$ convenga al corpo A. Parimenti se questo corpo si moverà colla velocità v mezzana fra le due estreme, il corpo B si appropierà nello stesso momento la velocità $u = \frac{AV \pm BU - Av}{B}$. Inferisca chi legge, che le comunicazioni del movimento non dipendono quanto alla mutua velocità dei corpi, dalla loro materia, e figura.

In grazia di una semplice costruzione fingo i corpi A, B di tale materia, e figura, che sia costante, ed uguale all'unità la forza media f, da cui viene effettuata la comunicazione del moto. Giusta queste supposizioni avremo $\int f dt = T = AV - Av = Bu \mp BU$: formola, che mi suggerisce la seguente elegantissima costruzione.

Dal punto A della indefinita AnI (Fig. 1. 2. 3.) si tiri la normale AB, la quale si continui da una parte, e dall'altra, quanto fa di uopo. Si segni $AB = AV$, $AC = BU$ quantità di moto primitive dei corpi A, B. Nella figura prima, e seconda queste quantità di moto hanno la stessa direzione, e differiscono solamente in ciò, che nella prima figura è $AB = AV$ minore di $AC = BU$ (il che può intervenire, quantunque la velocità V del corpo urtante A debba esser maggiore della velocità U del corpo urtato B) e nella figura seconda è tutto all'opposto $AB = AV$ maggiore di $AC = BU$. Se in tale figura sarà $AC = BU = 0$, ci presenterà essa sotto degli occhi il caso, in cui il corpo A colpisce il corpo B quieto. Nella figura

terza

terza sono contrarie le direzioni delle quantità del moto AB = AV, AC = BU. Ho determinata AB maggiore di AC; perchè suppongo, che dopo la comunicazione del moto il corpo B cammini per la primitiva direzione del corpo A. Fatta AO = AC, per i punti O, C descrivasi la linea OzL, che si prolunghi giusta il bisogno da entrambi i lati. Taglisi pure AD = AB, si conduca la retta BDzk, e mentre l'ascissa AF dinota una porzione t del tempo impiegato nella comunicazione del moto, le ordinate FG, FH esprimeranno le quantità di moto Av, Bu, che in quel tale istante competono alle masse A, B. Parallele alla linea AzI si tirino le rette GN, CM, l'ultima delle quali nella figura terza si incontrerà nel punto M colla linea GF continuata.

Giacchè AB = AV; FG = AN = Av, sarà NB = AV − Av: ma per la similitudine dei triangoli BAD, BNG, BN = NG, ed NG = AF = t; dunque t = AV − Av. In oltre (Fig. 1. 2.) FH = Bu, AC = FM = BU, e per conseguenza MH = Bu − BU: ma per la similitudine dei triangoli CAO, HMC, HM = MC, ed MC = AF = t; dunque t = Bu − BU. In riguardo alla figura terza abbiamo FH = Bu, FM = AC = BU, e perciò MH = Bu + BU: ma per la similitudine dei triangoli CAO, HMC, MH = CM, e CM = AF = t; dunque t = Bu + BU. Ed abbracciando con una sola formola tutte e tre le figure, t = Bu ∓ BU. Ora essendosi trovato t = AV − Av, avremo per ultimo t = AV − Av = Bu ∓ BU: il che &c.

Quando è compiuta la comunicazione del moto colle leggi dei corpi molli, le masse A, B procedono unitamente colla comune velocità w, e perciò le loro quantità di moto serbano la ragione delle masse medesime. Nel

momento

momento F sia FG : FH :: A : B, ed AF sarà quel tempo, nel quale si effettua la comunicazione del moto, se i due corpi A, B sono molli. Per determinare il punto F facciasi A + B :: AB = AV: AT = BU. Essendo AC = BU, AT = BV, e relativamente alle figure prima, e seconda V > U, sarà in essa figura AT > AC. Condotta la linea TD, taglierà essa la linea OL nel punto H, per cui descrivasi la FH, parallela ad AB, che si continui sino in G nelle figure seconda, e terza. Dico essere AF il tempo, ~~applicando mentre la comunicazione~~, dopo il quale è compita la comunicazione del moto colle leggi dei corpi molli, ed FG, FH le quantità di moto competenti in detta circostanza ai corpi A, B.

In fatti stante il parallelismo delle linee AT, FH avremo

AB : AT :: FG : FH

AV : BV :: Av : Bu, e conseguentemente

v = u. essendo in tal caso $v = u = \frac{AV \pm BU}{A+B}$,

troveremo $AF = \frac{AB \cdot \overline{V \mp U}}{A+B}$, cioè a dire nella supposizione di f = 1 il tempo t consumato nella comunicazione del moto fra i corpi molli A, B eguale al prodotto AB delle masse moltiplicato nella primiera velocità relativa V ∓ U, e diviso per la somma A + A delle masse medesime.

Che se i corpi stessi siano elastici, di modo che si restituisca l'ammaccatura, si tagli FI = AF, ed IK = Av, IL = Bu saranno le quantità di moto, che competono ai corpi A, B perfettamente elastici, poiché è interamente terminata la comunicazione del movimento.

Non devono trascurarsi alcune curiose osservazioni. E primieramente (Fig. 2.) se AB = AV è minore di AC = BU, ed allo opposto V deve superar U; ne segue, che A deve essere necessariamente minore di B, ed AT = BV maggiore di AC = BU. Il punto F, che determina l'istante, in cui finisce la comunicazione

nicazione del moto giusta i canoni dei corpi molli, ha da cadere fra i punti A, D, e la proporzione fra le masse A, B ha da essere media fra le due $AB = AV : AC = BU$, nella: $DO = OD = OA + AD = AV + BU$; e conseguentemente minore di quella di $AV : BU$. Mentre AF sia minore di $\frac{1}{2} AD = \frac{1}{2} AV$, il corpo A elastico, finita che sia la comunicazione del movimento, continuerà per la primitiva direzione colla quantità di moto $IK = AV$. Ma se $AF = \frac{1}{2} AV$, il punto I cadrà in D, ed il corpo A resterà in quiete dopo il compimento della comunicazione del moto. In tale ipotesi sarà $FG = FD = AF = \frac{1}{2} AV$. Avremo parimente $AF = CM = MH = \frac{1}{2} AV$, e perciò $FH = \frac{1}{2} AV + BU$. Ma nello istante F dee stare * $A : B :: \frac{1}{2} AV : \frac{1}{2} AV + BU$. Considerando siccome date le due quantità di moto AV, BU, ed in oltre la massa A, e la velocità V, si determina col mezzo della premessa analogia il valore della massa $B = \frac{\frac{1}{2} AV + BU}{\frac{1}{2} V}$, posto il quale il corpo A si ferma, finita che sia la comunicazione del movimento giusta il canone dei corpi elastici. Se AF sarà maggiore di $\frac{1}{2} AV$, fatta $F2I = AF$, il punto 2I cadrà fuori della linea AD, ed il corpo A tornerà indietro colla quantità di moto $2I2K = AV$.

* $A : B :: FG : FH$; Dunque

Per modo di esempio sia $AV = 4$, $BU = 6$, $A = 2$, $V = 4$. Si fermerà il corpo A, quando sia $B = \frac{\frac{1}{2} AV + BU}{\frac{1}{2} V} = \frac{8}{2} = 4$. Assegnato alla massa B un valore più piccolo, il corpo A seguiterà per la primiera direzione e mentre le competa un valore più grande, il corpo A retrocederà.

Passo ora alla considerazione della seconda figura. Supponendosi la quantità di

moto

moto AV propria del corpo A maggiore della BU
propria del corpo B, la massa A può essere mag-
giore, eguale, o minore della B dentro certi
limiti; e conseguentemente la linea AB = AV
può superare la AT = BU, eguagliarla, o
essere dalla stessa superata. Comunque sia,
il punto F caderà sempre tra i due A, D, e le
due masse A, B dovranno corrispondersi in
una proporzione media fra le due AB = AV :
AC = BU, nulla · DE = OD = AD + AO =
AV + BU, e perciò potranno abbracciare
qualunque ragione minore di quella di
AB = AV : AC = BU. Se le due masse
A, B siano eguali, il punto F coinciderà
col punto P, e sarà AF = AP = AD − PD
$AD - \frac{1}{2} OD = AV - \frac{AV - BU}{2} = \frac{AV - BU}{2}$.
Segnata PI = AP, saranno IK = BU, IL = AV
le quantità di moto competenti ai corpi A, B
dopo compiuta la comunicazione del moto colle
leggi dei corpi elastici; di modo che essi corpi
avranno fra loro permutate le primitive quan-
tità di moto. Posto che sia AaF = aFD = ½ AV,
ed il punto F si sovrapponga al punto aF,
il corpo A finita la comunicazione del moto
colle leggi dei corpi elastici si fermerà, e nel
corpo B sarà passata tutta l'intera quantità
primitiva di moto DE = AV + BU. In tale
circostanza le due masse A, B si riferiranno
nella ragione aFaG = aFD = ½ AV : aFaH =
OaF = ½ AV + BU. Se il corpo A sarà
più piccolo di quello ricevuto la stabilita pro-
porzione, tornerà indietro, compiuta che sia
la comunicazione del movimento, secondo le leggi
dei corpi elastici, colla quantità di moto
aIaK, ed il corpo B viaggerà per la primiera
direzione colla quantità di moto aIaL =
DE + aIaK = AV + BU + aIaK, che supererà
la somma delle primitive per la grandezza aIaK,
la quale non può mai giungere a pareggiare
AD = AV, se non nel caso, che il corpo A

fosse

fosse minimo, e la velocità V infinita.

Resta che si faccia qualche riflessione sopra la terza figura, in cui supponendosi le velocità V, U contrarie, e che terminata la partecipazione del moto colle leggi dei corpi molli, ambo i corpi camminino per la direzione del corpo A, la quantità del moto AV di esso corpo deve essere più grande della BU propria del corpo B, e per conseguenza $AB > AC$. Le masse poi A, B possono stare fra le proporzioni di limite $OR = AV - BU$: nulla, nulla : $DE = AV - BU$; laonde A può essere maggiore, eguale, e minore di B. Quindi il punto T può restare al di sotto del punto B, con esso congiungersi, e salire al di sopra. Nella prima ipotesi il punto F cade fra i due O, P, nella seconda coincide col punto P, nella terza sta fra i punti P, D, ed in tutte tre dentro i limiti della linea OD. Il corpo A estingue prima nel corpo B la velocità negativa, il che essendosi effettuato nel tempo AO, gli fa poscia cangiar direzione, e finalmente dopo il tempo AF camminano di conserva con pari velocità. Relativamente adunque alla velocità terminale egli è lo stesso come se il corpo molle A colla quantità di moto $OR = AV - BU$ urtasse nel corpo molle B quieto, trovandosi in ambo i casi la comune velocità $= \frac{AV - BU}{A + B}$. Finito il congresso il corpo A elastico resterà in quiete, ed il corpo parimente elastico B sarà fornito della quantità di moto $AV - BU$, mentre sia $AF = \frac{1}{2} AD = \frac{1}{2} AV$, nella qual congiuntura le masse A, B si riguarderanno nella ragione di $FG = \frac{1}{2} AV : FH = OF = AF - AO = \frac{1}{2} AV - BU$. Egli è necessario per ottenere un tale effetto, che sia $\frac{1}{2} AV > BU$, altrimenti ne risulterebbe la massa B o nulla, o negativa. Se le due masse A, B sono eguali, compiuta la comunicazione del moto fra i corpi inerti, è ognuno di essi dotato della quantità di moto

D Q

PR = AV − BU. Posto che i detti corpi A, B siano elastici, si tagli DnI = AD, onde sia AnI = AV + BU, i loro competeranno le quantità di moto terminali nInK = BU, nIL = AV, passando nel corpo A la quantità primitiva di moto del corpo B, ed in questo la quantità primitiva di moto del corpo A. Finalmente se la massa A sarà minore della B, il punto F caderà per esempio in 3F, e fatta 3F3I = A3F, saranno 3I3K > BU, 3I3L > AV le quantità di moto terminali dei corpi elastici A, B. Se la massa A fosse infinitesima, si noverebbero 3I3K = AV, 3I3L = 2AV − BU.

Dalle premesse riflessioni si cavi l'importante conseguenza, che se le forze vive si pongono eguali alla quantità del moto, non si trova generalmente la necessaria eguaglianza fra la cagione, e l'effetto. Non restando nei corpi elastici dopo il congresso veruna contusione, le loro forze vive devono pareggiare le primitive. Vediamo un poco se ciò si verifica dalle quantità di moto. Quando i corpi A, B da principio si movono per la stessa direzione, come succede nelle figure prima, e seconda, ed in oltre dopo l'urto il corpo A non torna indietro, la somma delle quantità di moto IK + IL pareggia la somma delle quantità del moto primitive AB + AC; imperciocchè IK = ID, IL = OI, e perciò IK + IL = OD = AD + AO = AB + AC. Sin qui sembra, che il tutto rettamente proceda. Abbiamo due azioni eguali dalle ∫ fdt della forza media, una negativa, e l'altra positiva, e quanto moto AI la prima ha estinto nel corpo A, altrettanto la seconda ne ha prodotto nel corpo B. Ma se le circostanze portano, che il corpo A retroceda, si incontra una invincibile difficoltà, che gitta a terra la Cartesiana estimazione delle forze vive. E voglia il vero se nell'istante D, in cui il corpo B è fornito della quantità di moto DE eguale alla somma AB + AC delle primitive,

non è compiuta la comunicazione del movimento, ma essa continua per il tempo D2I, seguiranno in detto tempo due azioni positive, ed eguali, una delle quali aumenterà il moto del corpo B per la quantità D2I, e l'altra ne imprimerà una pari quantità al corpo A. Quindi l'aggregato delle due quantità di moto 2I2K, 2I2L supera l'aggregato delle due quantità di moto iniziali AB, AC per la doppia grandezza 2I2K, e con manifesto assurdo l'effetto eccede l'energia della propria cagione. In riguardo alla terza figura, se i due corpi A, B sono eguali, tagliata D2I = AD, sarà 2I il momento, in cui finisce la comunicazione del moto colle leggi dei corpi elastici. In questo incontro la quantità primitiva di moto del corpo A è passata nel corpo B, e quella del corpo B nel corpo A, e perciò nel principio, e nel fine della partecipazione del movimento abbiamo pari aggregati di quantità di moto. Che se la massa A è minore della B, ci vorrà un maggior tempo A3I per compiere la comunicazione del moto, e nello istante ultimo 3I le quantità di moto 3I3K, 3I3L supereranno le primitive AB, AC per la doppia grandezza 2I3I. Tutto a rovescio succederà, quando la massa A ecceda la B; ed impiegandosi nella comunicazione del moto il tempo AI minore di A2I, la somma IK, IL delle terminali quantità di moto si troverà più piccola di quella delle primitive AB, AC per la doppia magnitudine I2I. Conciosiachè nei corpi elastici dopo il congresso non resta alcuna contusione, non si sa capire il perchè della notata diminuzione.

Credono i Cartesiani di aggiustar le partite prescrivendo, che la quantità di moto negativa si sottragga dalle positive, ed affermando, che in tal maniera e nel principio, e nel fine dell'urto, ed in qualunque momento di mezzo si

ha

la serbava la medesima quantità di moto. In fatti (Fig. 1. 2.) $AB + AC = 2I2L - 2I2K$, e (Fig. 3) $AB - AC = OR = FG + FH = 3I3L - 3I3K$. Si comprenderà egualmente, quanto sia debole questa obbiezione, osservando che considerandosi nelle nostre figure positiva la quantità di moto per la direzione AD, si chiama negativa quella per la direzione contraria DA. La stessa azione $\int f dt$ si richiede per imprimere ad una massa una data quantità di moto o per la direzione AD, o per la contraria DA, o per qualunque altra. Nell'istante $2I$ (Fig. 1. 2) esistono in natura le due quantità di moto $2I2K$, $2I2L$, che sono maggiori delle due primitive AB, AC, e questa è una proposizione innegabile. Egli è infallibile, che esempigrazia la gravità dovrà agire per più lungo tempo generando $2I2K$, $2I2L$ di quello ci impieghi nel generare AB, AC. Ora nascendo quelle da queste col mezzo della comunicazione del moto, non ci è la dovuta corrispondenza fra la cagione, e l'effetto, quando si supponga, che $\int f dt$ sia la vera azione, e che le forze vive si misurino colle quantità del moto. Secondo i Cartesiani nei momenti A, O (Fig. 3) ci è la stessa quantità di moto. Ma e come mai, se mercè la doppia azione della forza, il corpo A ha perduta la quantità pel tempo AO, il corpo B la quantità eguale di moto SB, ed il corpo B la quantità eguale $AC = BU$, cioè a dire tutta quella, che avea da prima?

La sentenza Leibniziana, che vuole l'azione eguale a $\int f ds$, e la forza viva proporzionale alla massa moltiplicata nel quadrato della attuale velocità, non è soggetta alle notate difficoltà. In fatti compiuta la comunicazione del moto fra i corpi elastici, si trovano essi forniti dalla stessa somma di forze vive, che gli animava prima dell'urto, verificandosi l'equazione $AV^2 + BU^2 = Av^2 + Bu^2$, e chi legge ne

può

può fare la prova, sostituendo in cambio di v, u i valori sopra determinati $\frac{\overline{A-B}\cdot v \pm 2Bu}{A+B}$, $\frac{\overline{B-A}\cdot \pm u + 2Av}{A+B}$.

Conchiudo collo avvertire, che la costruzione da me adattata alla supposizione della forza media f costante, ed eguale all'unità può servire generalmente al Problema, qualunque sia la legge che dà regola alla forza f. L'ascissa AF (fig. 1. n. 3) si eguaglia universalmente a $\int f dt$, e questa sommatoria poi nel caso di $f = 1$, pareggia il tempo t, di modo che in detta ipotesi $AF = t$. Posta $AF = \int f dt = \frac{AB \cdot \overline{V \mp U}}{A+B}$, sarà compiuta la comunicazione del moto fra i corpi molli, e quando sia $AT = 2AF = \frac{2AB \cdot \overline{V \mp U}}{A+B}$, avremo il termine della comunicazione del moto fra i corpi elastici.

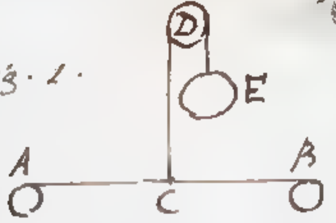
二

Dimostrazione
della Legge
delli
equilibrio:

Dimostrazione della Legge dell'Equilibrio.

1. Col Principio della Indifferenza si prova, che due pesi eguali A, B (Fig. 1.) applicati al vette orizzontale AB, e posti a distanze uguali AC, BC dall'ipomochlio C non possono intorno ad esso girare, perchè non può assegnarsi il perchè discenda anzi l'uno che l'altro. Alla fune CD, che gira intorno la carrucola D, si attacchi un peso E uguale alla somma dei predetti; e la stessa Indifferenza dimostra non esservi ragione, che prevalgano i due pesi A, B piuttosto che l'eguale E. Si farà dunque equilibrio: ma il punto C è tirato insù dal peso E = A+B; dunque dalla somma dei pesi A+B è tirato abbasso lo stesso punto; onde l'equilibrio sussiste; il che ec.

Fig. 1.



2. A pari distanza AC, BC (Fig. 2.) si adattino al vette orizzontale AB i pesi A = 2P, B = 2P, e fatta passare per la carrucola D una fune CD, da cui penda il peso E = A+B = 4P, si farà equilibrio. Il peso A = 2P si divida in due parti eguali G = P, C = P, che si collochino a distanze uguali AG, AC dal punto A, ed essendo esso punto tirato abbasso dalla pressione = 2P come ho dimostrato, sussisterà l'equilibrio col peso B = 2P, e quindi il punto C sarà tirato all'ingiù dal peso = 4P,

Fig. 2.

che

Dimostrazione della Legge che farà equilibrio col peso E = 4 P. Si levi il peso C = P da un canto, e dall'altro il peso E si riduca = 3 P, e l'equilibrio non si turberà. Imperchè i due pesi G = P alla distanza GC = 2 BC, B = 2 P alla distanza BC faranno equilibrio, ed il punto C sarà tirato abbasso dalla loro somma G + B = 3 P; il che &c.

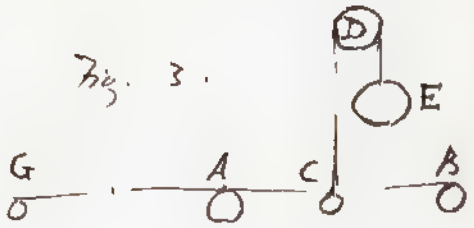


Fig. 3.

3. Essendo al solito orizzontale il vette GB (fig. 3.), ad uguali distanze AC, BC si sospendano i pesi A = 3 P, B = 3 P. Divido il peso A = 3 P in due parti C = 2 P che colloco in C, G = P, che pongo alla lontananza AG doppia di AC; per la cosa detta i pesi G = P, C = 2 P si equilibrano intorno il punto A, il quale sarà tirato abbasso dalla forza = 3 P, che farà equilibrio col peso B = 3 P; e quindi il punto C sosterrà la pressione = 6 P, che si equilibrerà col peso E = 6 P. Sussisterà l'equilibrio riducendo il peso E = 4 P, e levando il peso C = 2 P, onde resteranno applicati al vette i soli pesi G = P, B = 3 P, dalla somma dei quali sarà tirato abbasso il punto C, intorno a cui i predetti pesi si equilibrano; il che &c.

4. Collo stesso metodo proverò, che essendo nel vette orizzontale le distanze dall'ipomoclio come 1:4, come 1:5, come 1:6 &c., ed i pesi in ragion inversa, faranno equilibrio, ed il

mentovato

mentovato ipomoclio, sarà pressione eguale alla loro somma.

50. Passiamo ora a dimostrare lo stesso dalle ragioni non multiple fra le distanze dall'ipomoclio. Ho dimostrato che il peso P multiplo della unità alla distanza D fa equilibrio coi pesi $\frac{P}{2}$, $\frac{P}{3}$, $\frac{P}{4}$ ec. alle distanze $2D$, $3D$, $4D$ ec.; ma col peso P alla distanza D fa equilibrio il peso 1 alla distanza PD; dunque con tale peso alla suddetta distanza si equilibreranno i pesi $\frac{P}{2}$, $\frac{P}{3}$, $\frac{P}{4}$ ec. alle distanze $2D$, $3D$, $4D$ ec. Si osservi, che i pesi 1, $\frac{P}{2}$ sono in ragione inversa delle distanze PD, $2D$, e lo stesso dicasi degli altri pesi paragonati colle relative distanze. Si osservi inoltre, che possono non esser multiple le ragioni fra le distanze PD, $2D$; PD, $3D$; PD, $4D$ ec. Si stabilisca per esempio $P = 5$, e le trovate ragioni saranno come $5:2$, come $5:3$, come $5:4$. Basti questo esempio per indicare il modo di stabilire qualsivoglia ragione non multipla fra le distanze dei pesi dall'ipomoclio. Non potendo in tal caso nascer moto a cagione dell'equilibrio, si dimostra come sopra, che il punto suddetto sostiene una pressione eguale alla somma dei pesi.

51. Resta che si provi la legge dell'equilibrio fra due pesi applicati ad una retta

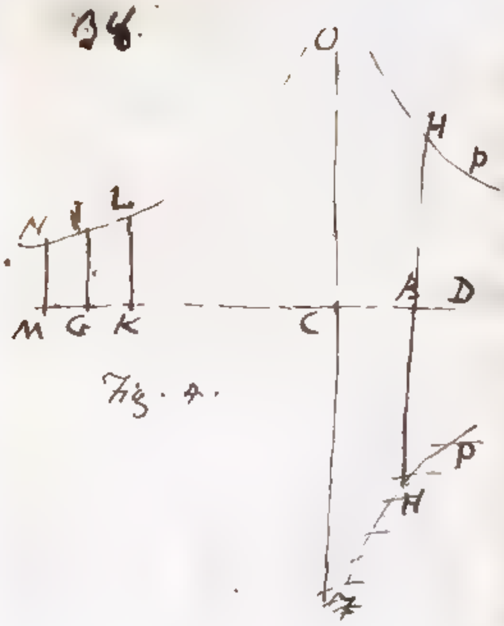


Fig. 4.

Dimostrazione della legge

nella orizzontale, quando la distanza CG (fig. 4.) fosse incommensurabile con CB. Fra gli assintoti MCD, OCO si descriva l'iperbola replicata, convessa NLG, OHP. La distanza irrazionale CG sia presa in mezzo dalle due distanze razionali CK, CM, e condotte all'iperbola le ordinate KL, MN, queste esprimeranno che i pesi relativi atti ad ottenere l'equilibrio col peso BH. Fra la quantità CK, e la CG se ne possono collocare infinite razionali, che con CG sempre più si accostino all'egualità, e lo stesso può succedere anche fra le quantità CM, CG, e le relative ordinate all'iperbola esprimeranno i pesi corrispondenti (a). Si cavi la

---

(a) Sia per esempio $CG = \sqrt{2}$. Questa quantità è posta in mezzo dalle due $CK = \frac{7}{5}$, $CM = \frac{10}{7}$. Più ancora se le accostano le due $\frac{24}{17}$, $\frac{17}{12}$, e vie più le altre due $\frac{41}{29}$, $\frac{58}{41}$, e maggiormente ancora le due $\frac{140}{99}$, $\frac{99}{70}$, e così all'infinito. La prima coppia di grandezze differisce per $\frac{1}{35}$, la seconda per $\frac{1}{204}$, la terza per $\frac{1}{1189}$, la quarta per $\frac{1}{6930}$, e procedendo collo stesso metodo le differenze diverrebbero sempre minori. Fra ciascuna coppia $\sqrt{2}$ è sempre media geometrica, che si confonde coll'aritmetica, quando è minima la differenza fra le grandezze estreme.

la conseguenza, che può ottenersi anche il peso relativo alla distanza CG verrà dinotato dalla ordinata GI, e che perciò i pesi BH, GI staranno in ragione inversa delle distanze CB, CG; il che ecc. Torna a notare, che stando in equilibrio alle distanze CB, CG i pesi come $\frac{1}{CB}$, $\frac{1}{CG}$, il punto C sosterrà una pressione uguale alla loro somma.

7. Stabilita la legge dell'equilibrio fra due pesi, si estende la stessa egualmente ai tre, ai quattro pesi ecc. Stiano equilibrati i due pesi A, B (Fig. 5.). Divido il peso A in due pesi G, F, che facciano equilibrio intorno al punto A, e levato il peso A, staranno in equilibrio rispettivamente al punto C i tre pesi B, F, G. Col medesimo artifizio si può dividere il peso B in due, e si darà l'equilibrio fra quattro pesi. Partendo di nuovo, avremo l'equilibrio fra cinque pesi, e così di seguito; ed in tutti questi incontri il punto C sosterrà una pressione uguale alla somma dei pesi equilibrati. Ecco la legge, che regola sì fatti equilibrj. Il prodotto dei pesi situati da una parte dall'ipomoclio nelle relative distanze si eguaglia al prodotto dei pesi nelle distanze rispettive collocati nella parte opposta. Dimostro questa verità in riguardo alla fig. 5.

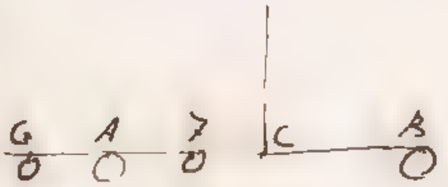


Fig. 5.

Ho

Dimostrazione della Legge

Ho provato essere A.AC = B.BC: ma A = G+Z; dunque G.AC + Z.AC = B.BC, ossia G.AC + Z.AZ + Z.ZC = B.BC. Fatta la osservazione, che sendo i pesi Z, G equilibrati intorno al punto A, abbiamo Z.AZ = G.AG, effettuata la sostituzione ne risulterà G.AC + G.AG + Z.ZC = B.BC, e finalmente G.GC + Z.ZC = B.BC; il che ec.

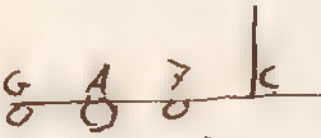


Fig. 5.

6. Dovendo l'equilibrio dipendere da una qualche ugualità, e non trovandosi questa generalmente fra i pesi, bisogna cercarla nelle azioni impedite di essi pesi. Queste azioni non vanno riferite al tempo, perchè sendo questo costante da una parte e dall'altra, non si darebbe mai equilibrio fra pesi ineguali. Rimane adunque che l'azione si misuri cogli spazj, pe' quali un peso tenta di agire, e l'altro di reagire. Immaginisi che segua un menomo moto, di modo che il peso G (fig. 6) cali abbasso per l'archetto Gg, ed il peso B ascenda per l'archetto Bb. La similitudine dei triangoli CGg, CBb mi dà l'analogia CG : CB :: Gg : Bb: ma per le cose dimostrate l'equilibrio ricerca la proporzione CG : CB :: B : G; dunque B : G :: Gg : Bb, e perciò B.Bb = G.Gg. Conseguentemente questa formola eguaglierà le azioni, che mutuamente impedisconsi.

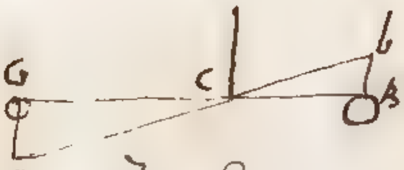
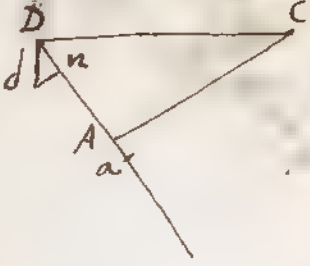


Fig. 6.

impediscono, e da tale uguaglianza l'equilibrio dipende. La stessa dimostrazione facilmente si adatta ai vetti ai quattro pesi &c.

Fig. 3



9. Al punto D (Fig. 3.) del vette CD sia obbliquamente applicata la forza D per la direzione DA; dico che tirata CA normale a Da, segue lo stesso effetto o si adatti la forza al punto D, o al punto A. Descriva il punto D l'archetto Dd, ed il punto A descriverà l'archetto Aa, onde sarà CD : CA :: Dd : Aa. Menata dn normale a Da, la forza applicata in D agisca nella propria direzione DA per lo spazio Dn, nel mentre che la forza applicata in A agisca per lo spazio Aa, onde si abbiano le due azioni D.Dn, D.Aa. Per la similitudine dei triangoli DCA, dDn abbiamo CD : CA :: Dd : Dn: ma CD : CA :: Dd : Aa; dunque Dd : Dn :: Dd : Aa; dunque Dn = Aa, e perciò essendo eguali le azioni D.Dn, D.Aa, egli è lo stesso l'applicare la forza D per la direzione Da o al punto D, o al punto A; il che &c.

10. Collo stesso metodo usato di sopra si prova; che nel vette ACB (Fig. 4.) piegato nell'angolo ACB le forze A, B normali alle braccia del vette fanno equilibrio quando esse forze stanno inversamente come CA : CB. Tirata pel punto C la

linea

4R

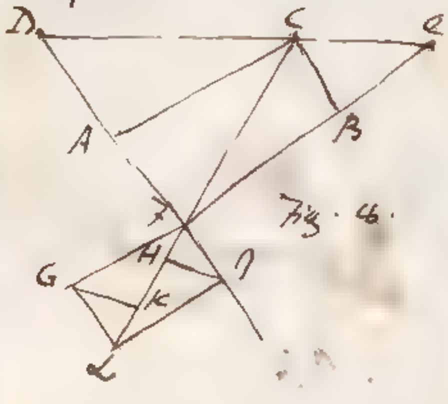


Fig. 4.

Dimostrazione della Legge

linea D C E a piacimento, e continuate le direzioni delle forze finchè la taglino nei punti D, E; le dette forze applicate in D, E faranno equilibrio, se manterranno la ragione inversa di CA : CB, esercitando esse forze la stessa azione come se fossero applicate in A, B

Ora essendo la linea DCE menata ad arbitrio colla sola condizione che passi pel punto C e tagli le direzioni delle forze nei qualsivoglia punti D, E, la posso anche condurre in maniera, che faccia transito e pel punto C, e pel punto Z, in cui si tagliano le direzioni delle due forze, e che perciò è comune alle dette direzioni. Il perchè egli è lo stesso l'applicare le forze in A, B, oppure in Z, rimanendo invariate le direzioni. Continuata la linea CZ, segno a piacimento in essa la porzione ZL, e prolungate le rette EZ, DZ, tiro pel punto L la LI parallela ad ZE, e la LG parallela ad ZD, onde si forma il parallelogrammo GZIL. Dai punti G, I conduco GK, IH normali ad ZL, che come è noto saranno fra loro eguali. La similitudine dei triangoli ZGK, ZCB mi dà l'analogia ZG : GK :: ZC : CB, e perciò ZG . CB = GK . ZC. Non altrimenti per la simiglianza dei triangoli ZIH, ZCA abbiamo ZI : IH :: ZC : CA,

e

e quindi l'equazione $FI . CA = IH . FC$: ma $GK . FC = IH . FC$, perchè $GK = IH$; dunque $FG . CB = FI . CA$, e conseguentemente $FG : FI :: CA : CB$. Se dunque FG esprimerà la forza applicata al punto B, ed FI la forza applicata al punto A, si avrà l'equilibrio, perchè le dette forze stanno in ragione inversa di $CB : CA$ secondo ciò, che si è dimostrato.

12. Il Sig.r Daniello Bernoulli ha con evidentissime ragioni metafisiche dimostrato, che alle due potenze FG, FI espresse dai lati del parallelogrammo $GFIL$ equivale la potenza dinotata dalla diagonale FL. Per la qual cosa egli è chiaro, che il punto C è tirato dalla forza FL per la direzione CL. Se le direzioni DF, EF fossero parallele, il punto F si discosterebbe all'infinito, ed in tale ipotesi si troverebbe $FL = FG + FI$, ed il punto C sarebbe tirato dalla somma delle forze applicate ai punti D, E per la direzione CL parallela ad esse forze, siccome ho provato di sopra in riguardo ai pesi.

13. Le addotte riflessioni fanno vedere necessarie le leggi dell'equilibrio, e delle azioni, e rendono manifesta la connessione colla legge dell'equivalenza delle potenze, che conforme ha dimostrato il Ab. Vincenzo Riccati mio fratello dipende

dalla

Dimostrazione della Legge

dalla legge delle azioni. Si inferisca che, create le potenze da Iddio Signore, le leggi da me nominate erano una conseguenza della loro natura, e non potevano dall'arbitrio del Creatore ricevere alterazione.

Soluzione

del Problema inverso delle Forze
centrali nel vuoto, quando esse
forze stanno reciprocamente
come i quadrati delle distanze
dal centro.

Lettera sopra
La Forza Centrifuga.

Revmo Pre Sigre Prone Colmo

È da gran tempo, ch'io desiderava l'opportunità di dedicare a V. P. Revma la mia servitù, e di significarle l'altissima stima che nutro per Lei, la quale viene sempre più aumentata dalle continue sublimi sue produzioni, che fanno tanto onore alla Italia. Tra le quattro sue Memorie contenute nel Tomo II. della Società Italiana, una tratta della Forza Centrifuga. Intorno a tale argomento ho inserito l'anno 1783 nella Raccolta di Lucca una Dissertazione, il cui titolo *Riflessioni sopra la vera Origine, e Natura della Forza Centrifuga*, la quale forse non le sarà capitata sotto degli occhj. In essa faccio vedere, che la Forza Centrifuga trae la sua origine dallo scapito nel tempo dt di una porzione infinitesima del secondo ordine della grandezza mu^2 uguale alla massa moltiplicata nel semiquadrato della velocità del corpo, che suole chiamarsi Forza viva. Ecco il raziocinio di cui mi sono servito.

Il corpo A sia fornito di tale velocità costante u, che nel tempo dt scorra lo spazio AD normale alla linea AE. Se nel momento, che si trova in A, io lo inchioderò alla verga CA priva di inerzia, ed atta a girarsi liberissimamente intorno al centro C, giungerà esso corpo al punto B dopo il mentovato tempicello dt.

Seguirebbe lo stesso, se liberato il corpo A dalla verga, fosse sollecitato con direzione tendente al centro C da un elastro ED, che nel tempo dt gli facesse scorrere con moto accelerato lo spazio DA.

Mi faccio ad indagare di qual forza f dovrebbe

essere

essere domata l'elastro i. Chiamo $CA = r$, $AD = ds$, $DB = dz$, m la massa del corpo A, ed v la velocità guadagnata nel punto B in rigore dell'azione dell'elastro ED. Per la nota formola avremo $fdz = \frac{mv^2}{2}$; e giacché colla velocità u nel tempo dt si scorrerebbe lo spazio $2DB = 2dz$, ed inoltre le velocità u, v stanno come gli spazj $AD = ds$, $2DB = 2dz$ attesi ad esser passati in pari tempo, ne ricaveremo l'analogia $u : v :: ds : 2dz$, e poscia l'equazione $\frac{2u\,dz}{ds} = v$. Sostituito questo valore in cambio di v nella formola $fdz = \frac{mv^2}{2}$, troveremo, adempiute le convenienti divisioni, $f = mu^2 \cdot \frac{2dz}{ds^2}$. La proprietà nota del circolo ci suggerisce l'equazione $2r\,dz = ds^2$, o sia $\frac{2dz}{ds^2} = \frac{1}{r}$. Fatto uso di un tal valore, si scoprirà la forza dell'elastro $f = \frac{mu^2}{r}$.

Si adatti ora il corpo nuovamente al punto A della verga, di modo che possa lungo essa scorrere senza patir resistenza, e ad esso si appenga l'elastro EA alla verga raccomandato; dico che il detto corpo si manterrà sempre alla medesima distanza AC dal centro C. E vaglia il vero, se non ci fosse la molla EB, il corpo si discosterebbe dal centro per lo spazio BD: ma l'azione dell'elastro l'avvicina al centro per un pari spazio; dunque il corpo né si accosterà, né si allontanerà.

Non avendo il corpo moto alcuno né di accostamento, né di allontanamento in riguardo al centro C, dee stare necessariamente fra due forze uguali e contrarie, cioè a dire fra la forza centrifuga, e quella dell'elastro: e giacché la forza dell'elastro si eguaglia ad $\frac{mu^2}{r}$, tale sarà altresì il valore della forza centrifuga.

Tirata

Tirata AF normale a CD, egli è noto che le due linee FB, BD sono adequatamente uguali, e conseguentemente FD = a AD. Quindi espressa per AD la velocità primitiva e per la detta direzione, si contrassegnerà per DF = a DA la velocità nel punto B per la direzione DB proveniente dall'azione dell'elastro per lo spazio DB. La composizione dei moti mi insegna, che al corpo A giunto in B resterà per la direzione della tangente condotta al punto B del circolo AA, vale a dire per la direzione AF una velocità proporzionale alla stessa AF.

Essendo rettangolo il triangolo AFD, il quadrato di AD pareggia quelli dei lati AF, FD. La forza viva nel punto A si esprimeva per $\overline{AD}^2$, la forza viva residua in B viene dinotata da $\overline{AF}^2$, e perciò la forza viva perduta scopresi proporzionale ad $\overline{FD}^2$, o sia al quadrato della velocità in B per la direzione DB.

Il preciso valore della forza viva perduta si è $\frac{mv^2}{2} = f dz = \frac{mu^2 dz}{r}$, sostituendo in cambio di f l'equivalente grandezza $\frac{mu^2}{r}$. Ora se la detta forza perduta nel tempo minimo dt dividesi per dz = AD, spazio, per cui tanto di agire la forza centrifuga, ne risulta il valore $\frac{mu^2}{2}$ della stessa forza centrifuga, la quale proviene dallo scapito della nominata forza viva.

Da una perdita dunque di forza viva infinitesima del secondo ordine, mercecchè uguale ad $\frac{mu^2 dz}{r}$, mentre dal corpo A si è scorso l'arco minimo AB, e che per quanto il corpo si giri, non supera mai una quantità infinitamente picciola del primo grado nasce una forza di valore finito, quale si è la centrifuga $\frac{mu^2}{2}$

Alla forza centrifuga non si può attribuir vera

azione

azione atta a variare lo stato del corpo, essendo tutti i suoi conati diretti non a mutare, ma a conservare lo stato del corpo stesso. Ciò non ostante se, rimosso l'impedimento o del chiodo, o dell'elastro, non segue più in tempo minimo la perdita infinitamente piccola del secondo ordine di forza viva; un tal effetto lo possiamo immaginar derivato da una specie di azione della forza centrifuga, la quale riesce opportuna per ispiegar l'equilibrio tra la detta forza ed un'altra.

Non potendo convenire alla forza centrifuga vera azione capace di alterare lo stato del corpo, non è lecito l'assegnargliela, e mentre pur vi si assegni, bisogna regolare i computi in maniera, che per questo capo la forza viva del corpo non resti punto modificata.

Alle affezioni principali della forza centrifuga da V. P. Revma dottamente dimostrate, giudichi se si potesse aggiugnere anche quella da me scoperta, che ne determina l'origine, e la natura.

Nel proseguimento della Memoria Ella passa a più sublimi ricerche, che sono da lei magistralmente trattate. Le cose scritte in questa mia Lettera hanno avuto l'oggetto principale di prendere da esso occasione di rassegnarle la mia divozione, e di protestarmi costantemente

Di V. P. Revma

Treviso 17. 9bre 1766.

Al P. D. Gregorio Fontana
Pavia

Divot.mo Obbl.mo Servitore
Giordano Riccati

Della riduzione delle formole $f\,dz = m\,u\,du$, $\frac{dz}{\sqrt{dt}} = u$, $f\,dz = m\,du$, $f\,dz^n = m\,ddz$ alle misure conosciute.

Dissertazione Fisico-Matematica del Sig.r Co. Giordano Riccati.

Dalla riduzione della formola $fds = mudu$, $\frac{ds}{dt} = u$ $fdt = mdu$, $fdt^2 = mdds$ alla misura conosciuta.

Dissertazione Fisico-Matematica del Sig.r Co. Giordano Riccati.

Della riduzione delle formole $\frac{ds}{dt}=u$, $fds=mudu$, $fdt=mdu$ alla misura conosciuta.

La formole $\frac{ds}{dt}=u$, $fds=mudu$, $fdt=mdu$, che strettamente appartengono, la prima alla velocità equabile, e le due ultime alla forza costante, si adattano ancora alla velocità, e alla forza variabile; perchè quantunque sieno variabili la velocità, e la forza, nulladimeno uno spazio minimo in tempo minimo si scorre equabilmente, e la forza variabile si mantiene costante, mentre si applica ad uno spazio, o ad un tempo infinitesimo. Le nostre formole adunque sono generalmente vere; e perciò quella riduzione alle misure note, che vale per le velocità, e per le forze costanti, conviene altresì alle velocità, e alle forze variabili.

La formola $\frac{ds}{dt}=u$ si cangia nella seguente analogia $dt : ds :: 1 : u$, la quale mi insegna, che stando nel moto equabile gli spazj in ragione dei tempi, nei quali si scorrono, sarà u quello spazio, che si passa nel tempo 1. Riduciamo la nostra formola più generale, facendola nascere dall'analogia $dt : ds :: k : u$, in cui u è quello spazio, che colla velocità u si passa equabilmente nel tempo conosciuto k; e quindi per esso spazio la velocità stessa si esprime. Da essa analogia si deduce $\frac{k\,ds}{dt}=u$.

Integro le altre due formole nella supposizione di f costante, ed ho $\sqrt{\frac{2fs}{m}}=u$, $\frac{ft}{m}=u$; e per conseguenza $\sqrt{\frac{2fs}{m}}=\frac{ft}{m}$, o pure $\sqrt{\frac{2ms}{f}}=t$. Nelle vicinanze della terra, ed in queste nostre ragioni

pongo

pongo $f=m$; e noto inseguendo gli sperimenti, che nel tempo k un grave scorre con moto accelerato lo spazio e; laonde avremo $\sqrt{2e} = k$. Le due ultime equazioni rigorosamente parlando non altro sono che proporzioni, le quali somministrano l'analogia $\sqrt{2e} : k :: \sqrt{\frac{2ms}{f}} : t$, ed indi la vera equazione $k\sqrt{\frac{ms}{fe}} = t$, che mi dà la relazione tra gli spazj ed i tempi, quando la forza fo è costante, qualunque sia la ragione tra la forza f e la massa m.

Prese le differenze nella stessa ipotesi, si avrà la formola $\frac{k\,ds}{2\sqrt{\frac{efs}{m}}} = dt$, da cui si deduca $\frac{k\,ds}{dt} = 2\sqrt{\frac{efs}{m}}$: ma $\frac{k\,ds}{dt} = u$; dunque $2\sqrt{\frac{efs}{m}} = u$, e conseguentemente $2efs = \frac{mu^2}{2}$; la qual formola vale, quando la forza è costante.

Differenziando innovo $2efds = mudu$, e questa formola per la cosa detta di sopra dei passi è giusta in riguardo alle forze costanti, e variabili.

In cambio di u si sostituisca nell'omogeneo di comparazione il suo valore $\frac{k\,ds}{dt}$, e ne risulterà $2efds = \frac{mk\,ds\,du}{dt}$, o sia $\frac{2efdt}{k} = mdu$.

Or ecco le tre formole ridotte alle misure conosciute $\frac{k\,ds}{dt} = u$, $2efds = mudu$, $\frac{2efdt}{k} = mdu$. La velocità u si esprime per quello spazio u, che con essa velocità si passerebbe equabilmente nel tempo dato k. e è quello spazio, che nella nostra ragione si scorre con moto accelerato nel detto tempo. Se k sia un minuto secondo, si eguaglia e ad once 161. del piede di Parigi.

Della riduzione della formola
$f\partial s = m u \partial u$, $\frac{\partial s}{\partial t} = u$, $f\partial t =$
$m\partial u$, $f\partial t^2 = m\partial\partial s$ alla
misura conosciuta.

La compiuta soluzione di un problema fisico-meccanico richiede, che la formola, a cui si perviene, alla misura conosciuta riducasi. Nello scioglimento di sì fatti problemi si adoprano le formole (1.) $f\partial s = mu\partial u$, (2.) $\frac{\partial s}{\partial t} = u$, (3.) $f\partial t = m\partial u$, (4.) $f\partial t^2 = m\partial\partial s$, le quali del pari si adattano alle ipotesi della forza f o costante, o variabile. La prima formola universalmente si avvera, o si muova il corpo m per uno spazio uguale allo spazio s, per cui agisca la forza f, o per uno spazio maggiore, o minore. Le altre tre formole si appoggiano alla necessaria condizione, che la forza eserciti azione, ed il corpo si muova per eguali spazj.

Prima di ogni altra cosa mi pongo ad indagare quali siano le relative misure del tempo, e dello spazio accettato dalla nostra formola. Dipendone da esse misure anche quelle della velocità, la quale in essa formola si agguaglia allo spazio, che si scorrerebbe con essa velocità equabile, diviso per il tempo impiegato a percorrerlo. Quando per mano la formola (4.) $f\partial t^2 = m\partial\partial s$, in cui ∂t è costante, e supponendo nella nostra ragione il peso f uguale alla massa m, trovo mediante una doppia integrazione $\frac{t^2}{2} = s$, e conseguentemente $\sqrt{2s} = t$.

Scelgasi

Scelgasi ad arbitrio la misura dello spazio si per esempio per pollici del piede di Parigi, o di Londra, ed essendo noto che un grave passa con moto accelerato in un minuto secondo pollici del piede di Parigi num.° 181, del piede di Londra num.° $193\frac{1}{3}$ si nominerà questo spazio, e sostituendo e in cambio di e nell'ultima formola, si troverà $\sqrt{re} = t$, cioè a dire è uguale a tante unità, quante se ne comprendono in $\sqrt{re}$: ma t pareggia un secondo; dunque si suppone questo diviso in tante parti, quante unità sono contenute in $\sqrt{re}$, e ciascuna di tali parti $= \frac{1}{\sqrt{re}}$ si considera come unità. + Ecco dunque la misura del tempo relativa a quella dello spazio accettata dalle consuete formole che nelle soluzioni dei problemi si adoprano.

+ Ponendo $rs = 1$, e per conseguenza $s = \frac{1}{r}$, si trova $t = 1$, cioè a dire il tempo uguale ad una di quelle misure $\frac{1}{\sqrt{re}}$ che si assume come unità, durante la quale il corpo scorre la metà di quello spazio che si considera siccome unità, e questa metà nel nostro caso sarà un mezzo pollice.

Fatta la riflessione, che al variarsi della misura dello spazio, si varia ancor quella del tempo, dividendosi un secondo in parti $\sqrt{362}$ se si usano i pollici di Parigi, ed in parti $\sqrt{346\frac{2}{3}}$ se si adoprano i pollici di Londra, riesce molto più comodo, che quantunque si diversifichi la misura dello spazio, quella del tempo rimanga sempre costante, prendendosi sempre giusta consuetudine un secondo per unità. Si otterrà ciò modificando nella seguente maniera la formola dello spazio infinito

alle misure conosciute

al tempo $\sqrt{2s} = t\sqrt{2a}$. Ed in fatti posto $s = a$, si trova $t = 1$, cioè ..., dire, come l'esperienza c'insegna, uguale ad un secondo il tempo, in cui si scorre lo spazio a.

Passo a considerare le formole nascenti dall'integrare le formole
(1) $fds = mudu$, (2) $\frac{ds}{dt}$, (3) $fdt = mdu$
nella ipotesi di $f = m$, onde si abbia $s = \frac{u^2}{2}$ o sia $\sqrt{2s} = u$, $t = u$; né tralascio qualche avvertenza intorno alla formola (2) $\frac{ds}{dt} = u$.

Qualunque misura del tempo si assuma, sarà sempre $\sqrt{2s} = u$, ed essendo s lo spazio, a cui applicandosi la gravità, il corpo ne ha fatto acquisto dalla velocità u, si esprimerà sempre la detta velocità per $\sqrt{2s}$. Quindi ad $s = a$ corrisponderà la velocità $u = \sqrt{2a}$ che si acquista dal grave, che cade liberamente a piombo, in un minuto secondo. Perché la velocità u si esprima per misure note, né la formola $\sqrt{2s} = u$ ha bisogno di alcuna alterazione.

Non così addiviene dalle altre due formole $\frac{ds}{dt} = u$, $t = u$ nelle quali ha luogo il tempo. Lasciandole intatte, si assumerebbe per unità la porzione di secondo $\frac{1}{\sqrt{2a}}$, e volendo misurare il tempo per secondi, fa di mestieri moltiplicare dt, e t per $\sqrt{2a}$, onde la formola prenderà il seguente aspetto

$\frac{ds}{dt\sqrt{2a}} = u$, $t\sqrt{2a} = u$

e voglia il vero, giacché $\frac{ds}{dt\sqrt{2a}} = u$,

Dalla riduzione della formola avremo $\frac{ds}{dt} = u\sqrt{2a}$, e passando alla analogia $dt : ds :: 1 : u\sqrt{2a}$. Se dunque nel tempo dt si scorre lo spazio ds, nel tempo 1, ossia in un secondo si dovrà passare lo spazio $u\sqrt{2a}$ colla velocità equabile u, e quando $u = \sqrt{2a}$, con tale velocità costante dovrà il mobile camminare lo spazio $2a$. Questa verissima, e notissima conseguenza si fa toccar con mano si aggiustarebbe dalla formola $\frac{ds}{dt\sqrt{2a}} = u$ quando il tempo si misura per minuti secondi, essendo palese ad ogni Geometra, che colla velocità $= \sqrt{2a}$ acquistata dal grave in un minuto secondo, la quale si conservasse invariabile, viaggerebbe in pari tempo lo spazio $2a$, doppio di quello, da cui cadendo ha esso acquistato della predetta velocità.

Resta da dir qualche cosa intorno alla formola $t\sqrt{2a} = u$, l'esattezza della quale apparisce mettendo $u = \sqrt{2a}$, e deducendone $t = 1$. In oltre essendo nella ipotesi della gravità costante le velocità come i tempi, cangiata la formola nella analogia $1 : \sqrt{2a} :: t : u$ ne raccoglieremo la illazione, che siccome nel tempo 1, che è quanto dire in un minuto secondo il grave guadagna la velocità $\sqrt{2a}$, così nel tempo t conseguisce la velocità u.

Ridotte le nostre formole alle misure conosciute nella supposizione di $f = m$, la riduzione vale generalmente. Ho già osservato che la formola (1) $fds = mudu$

non

alla misura conosciuta non abbisogna di riduzione. Lasciando intatte le altre tre (2) $\frac{ds}{dt} = u$, (3) $f dt = mdu$, (4) $f dt^2 = mdds$, si prenda per unità la porzione di secondo $\frac{1}{\sqrt{2a}}$ e moltiplicando dt per $\sqrt{2a}$, il tempo misurasi per secondi. Ecco dunque le quattro formole, che misurando il tempo per secondi, soddisfanno a qualunque ipotesi di forza costante, o variabile (1). $f ds = mudu$, (2) $\frac{ds}{dt\sqrt{2a}} = u$, (3). $f dt\sqrt{2a} = mdu$, (4) $f dt^2 . 2a = mdds$.

In due maniere si può procedere nella soluzione dei problemi o ponendo in opera le formole ridotte, ovvero facendo uso delle formole consuete, e moltiplicando poscia nell'ultima formola t per $\sqrt{2a}$. Giudico espediente d'illustrare la teoria con qualche esempio.

Esempio I

Un grave, il cui peso $=$ uguale alla massa m, venga ritardato nella discesa dalla resistenza $= \frac{u^2}{g}$ proporzionale al quadrato dell'attuale velocità, si dimanda la relazione fra gli spazj percorsi s, ed i tempi t impiegati a percorrerli, i quali tempi si esprimano per secondi.

Richiede la stabilita ipotesi $f = m - \frac{u^2}{g}$, e quindi avremo per la (1) formola fra $m - \frac{u^2}{g} . ds = mudu$ e conseguentemente $\frac{2ds}{gm} = \frac{2udu}{gm - u^2}$.

Della riduzione delle formole

Moltiplico per $n = 0{,}4342944819$ sottotangente della logaritmica delle tavole, per poter ad esse ricorrere nel computo dei logaritmi; onde si abbia

$\frac{n a\, ds}{gm} = a \cdot \frac{n u\, du}{gm-u^2}$, ed integrando

$$\frac{n a s}{gm} = \log. gm - \log. \overline{gm-u^2} = \log. \frac{gm}{gm-u^2}$$

nella logaritmica della sottotangente $= a$ si presa l'unità come protonumero: stà aggiunta l'opportuna costante, acciocchè ad $u = 0$ vi corrisponda $\frac{n a s}{gm} = \log. 1 = 0$, e perciò $s = 0$.

Sostituito nella formola (3) in cambio di f il suo valore $m - \frac{u^2}{g}$, si presentava $\overline{m - \frac{u^2}{g}} \cdot dt \sqrt{re} = m\, du$,

o sia $\frac{\sqrt{re} \cdot n\, dt}{\sqrt{gm}} = \frac{n \sqrt{gm} \cdot du}{gm - u^2} = \frac{du}{\sqrt{gm} + u}$

$+ \frac{du}{\sqrt{gm} - u}$; e moltiplicando per a

$\frac{\sqrt{re} \cdot n a\, dt}{\sqrt{gm}} = \frac{a\, du}{\sqrt{gm} + u} + \frac{a\, du}{\sqrt{gm} - u}$. Dalla

integrazione raccolgo

$$\frac{\sqrt{re} \cdot n a t}{\sqrt{gm}} = \log. \overline{\sqrt{gm} + u} - \log. \overline{\sqrt{gm} - u}$$

$= \log \frac{\sqrt{gm} + u}{\sqrt{gm} - u}$ nella logaritmica della

sottotangente $= a$; ed assunta l'unità in figura di protonumero, riferendosi $t = 0$ ad $u = 0$, non si dovea aggiungere la costante. Passando dai logaritmi ai numeri, e chiamata c

la

la base della logaritmica, che ha per suo logaritmo il protonumero = 1, la qual base in riguardo alle logaritmi delle tavole pareggia il Dieci, trovo

$$c^{\frac{2at\sqrt{ra}}{gm}} = \frac{gm+u}{gm-u}$$, e con facile calcolo

ne deduco $$\frac{\left(c^{\frac{2at\sqrt{ra}}{\sqrt{gm}}}-1\right)\sqrt{gm}}{c^{\frac{2at\sqrt{ra}}{\sqrt{gm}}}+1} = u$$

e poscia dopo alquante operazioni

$$\frac{\left(c^{\frac{2at\sqrt{ra}}{\sqrt{gm}}}+1\right)^2}{4c^{\frac{2at\sqrt{ra}}{\sqrt{gm}}}} = \frac{gm}{gm-u^2}$$. Dalla sostituzione

dello scoperto valore in luogo di $\frac{gm}{gm-u^2}$

nella equazione $\frac{2as}{gm} = \log.\frac{gm}{gm-u^2}$

ne nasce finalmente

$$\frac{2as}{gm} = \log.\frac{\left(c^{\frac{2at\sqrt{ra}}{\sqrt{gm}}}+1\right)^2}{4c^{\frac{2at\sqrt{ra}}{\sqrt{gm}}}} = 2\log.\left(c^{\frac{2at\sqrt{ra}}{\sqrt{gm}}}+1\right)$$

$-2\log.2 - \log. c^{\frac{2at\sqrt{ra}}{\sqrt{gm}}}$: ma $\log. c^{\frac{2at\sqrt{ra}}{\sqrt{gm}}}$

$= \frac{2at\sqrt{ra}}{\sqrt{gm}}$; dunque sostituendo, e dividendo per 2

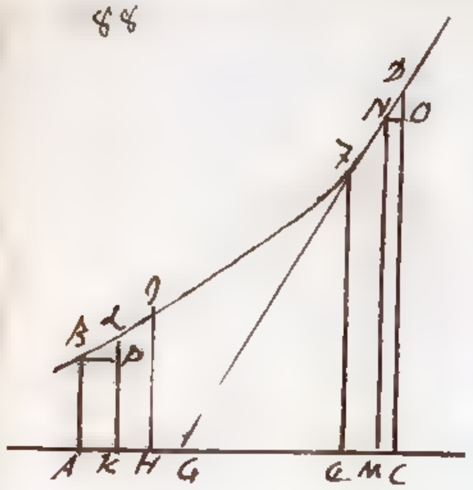
$$\frac{as}{gm} = \log.\left(c^{\frac{2at\sqrt{ra}}{\sqrt{gm}}}+1\right) - \log.2 - \frac{at\sqrt{ra}}{\sqrt{gm}},$$

formola che contiene la cercata relazione fra lo spazio s percorso dal corpo m, ed il tempo t espresso in secondi impiegato a percorrerlo.

Se mi fossi servito delle solite formole, avrei rinvenuto

$$\frac{as}{gm} = \log.\left(c^{\frac{2at}{\sqrt{gm}}}+1\right) - \log.2 - \frac{at}{\sqrt{gm}}$$, e

per



Dalla riduzione della formola per ridurre il tempo ad esser misurato coi secondi, sarebbe bastato ch'io moltiplicassi la specie t per $\sqrt{ra}$.

Apparirà più chiara la verità della formola ritrovata, facendo vedere che posto $g = \infty$, onde si annulli la resistenza $\frac{u^2}{g}$, ne risulta $s = at^2$, espressione nascente dalla doppia integrazione della quarta formola ridotta $ra\int dt^2 = m\,dds$ nella supposizione di $f = m$. Sia BID la logaritmica delle tavole riferita all'asse AC. Si accomodi ad essa il protonumero $AB = 1$, ed il numero $QI = 2$. Segnate $AH = \frac{2at\sqrt{ra}}{\sqrt{gm}}$, $AK = \frac{at\sqrt{ra}}{\sqrt{gm}}$, saranno le ordinate $HI = c^{\frac{2at\sqrt{ra}}{\sqrt{gm}}}$, $KL = c^{\frac{at\sqrt{ra}}{\sqrt{gm}}}$. Taglio $QM = AK = \frac{at\sqrt{ra}}{\sqrt{gm}}$ e condotta l'ordinata MN, si avrà per la natura della nostra curva

$$AB : KL = QI : MN$$
$$1 : c^{\frac{at\sqrt{ra}}{\sqrt{gm}}} = 2 : 2c^{\frac{at\sqrt{ra}}{\sqrt{gm}}}.$$

e conseguentemente $MN = 2c^{\frac{at\sqrt{ra}}{\sqrt{gm}}}$. Accomodo alla logistica l'ordinata $CD = HI + AB = c^{\frac{2at\sqrt{ra}}{\sqrt{gm}}} + 1$, la quale riuscirà maggiore della MN per la grandezza OD, che si determina conducendo NO parallela ad AC. Sarà pertanto $OD = CD - MN = c^{\frac{2at\sqrt{ra}}{\sqrt{gm}}} + 1 - 2c^{\frac{at\sqrt{ra}}{\sqrt{gm}}} = \left(c^{\frac{at\sqrt{ra}}{\sqrt{gm}}} - 1\right)^2$: ma $c^{\frac{at\sqrt{ra}}{\sqrt{gm}}} - 1 = KL - AB = PL$, menata BP parallela ad AK, e poichè $AK = \frac{at\sqrt{ra}}{\sqrt{gm}}$ è infinitesima, $BP : PL$ così la sottotangente al protonumero

mero, o sia $BP = \frac{at\sqrt{ra}}{\sqrt{gm}} : PL :: a : 1$;
dunque $PL = \frac{t\sqrt{ra}}{\sqrt{gm}}$, e perciò $OD = \overline{PL}^2$
$= \frac{rat^2}{gm}$. La linea ZG tocchi la curva
nel punto Z, di modo che sia la sottotangente $QG = a$. Essendo minima la
linea QC, avremo

$$ZQ : QM :: OD : ON$$
$$r : a :: \frac{rat^2}{gm} : \frac{aat^2}{gm} = ON$$

Dalle cose dette raccoglievamo essere
$AC = AQ + QM + MC = \log. r + \frac{at\sqrt{ra}}{\sqrt{gm}}$
$+ \frac{aat^2}{gm}$; ma $AC = \log. CD = \log. (c^{\frac{2at\sqrt{ra}}{\sqrt{gm}}} + 1)$;
dunque $\log(c^{\frac{2at\sqrt{ra}}{\sqrt{gm}}}+1) = \log. r + \frac{at\sqrt{ra}}{\sqrt{gm}}$
$+ \frac{aat^2}{gm}$. Nella formula

$$\frac{as}{gm} = \log(c^{\frac{2at\sqrt{ra}}{\sqrt{gm}}}+1) - \log. r - \frac{at\sqrt{ra}}{\sqrt{gm}}$$

sostituisco in vece di $\log.(c^{\frac{2at\sqrt{ra}}{\sqrt{gm}}}+1)$
il valore testè scoperto, e mi si presenta

$$\frac{as}{gm} = \log. r + \frac{at\sqrt{ra}}{\sqrt{gm}} + \frac{aat^2}{gm} - \log. r - \frac{at\sqrt{ra}}{\sqrt{gm}}$$

e cancellati i termini, che si elidono, e
fatta la divisione per $\frac{a}{gm}$, $s = at^2$,
come si doveva dimostrare.

Esempio II

Un corpo sia fornito da principio della velocità $\sqrt{ab}$, che acquisterebbe discendendo nel vuoto dall'altezza b, cammini orizzontalmente attraverso di un fluido incontrando la resistenza $= \frac{u^2}{g}$ proporzionale al quadrato della attuale velocità: si dimanda che si

determini

Dalla riduzione della formola determino la relazione fra gli spazj passati s, ed i tempi espressi in secondi impiegati a passare i predetti spazj.

Collocando nella (1) formola $-\frac{u^2}{g}$ in cambio di f, ne proverrà $-\frac{u^2 ds}{g} = m\,du$, e conseguentemente $\frac{n.a\,ds}{gm} = -a.\frac{du}{u}$. L'integrazione mi dà $\frac{n.as}{gm} = \log\frac{\sqrt{rb}}{u}$ nella logaritmica della sottotangente a, prendendo come protomeno l'unità. Ho introdotta l'appropriata costante, onde nel principio del moto, quando la velocità $= \sqrt{rb}$, si trovi $\frac{nas}{gm} = \log 1 = 0$, e perciò $s = 0$.

Nella formola (3.) pongo $-\frac{u^2}{g}$ in vece di f, e mi si presenta $-\frac{u^2 dt \sqrt{ra}}{g} = m\,du$, o sia $\frac{\sqrt{ra}.dt}{gm} = -\frac{du}{u^2}$, ed integrando $\frac{\sqrt{ra}.t}{gm} = \frac{1}{u} - \frac{1}{\sqrt{rb}}$. La costante aggiunta $\frac{1}{\sqrt{rb}}$ fa sì, che quando nel cominciamento del moto $u = \sqrt{rb}$, si trovi $t = 0$. Dalla scoperta formola si deduce $1 + \frac{\sqrt{ra.rb}.t}{gm} = \frac{\sqrt{rb}}{u}$. In cambio di $\frac{\sqrt{rb}}{u}$ si sostituisca il ritrovato valore nell'equazione $\frac{as}{gm} = \log\frac{\sqrt{rb}}{u}$ e ne risulterà $\frac{as}{gm} = \log.\left(1 + \frac{\sqrt{ra.rb}.t}{gm}\right)$, formola contenente la relazione fra lo spazio passato s dal corpo m, ed il tempo.

alla misura conosciuta.

e agguardo in secondi, che si è impiegato a passare il suddetto spazio.

Svanirà la resistenza $\frac{u^2}{g}$ ponendo $g = \infty$. Sia l'ordinata $KL = 1 + \frac{\sqrt{2a2b} \cdot t}{gm}$ e tirata BP parallela ad AC si determina $PL = \frac{\sqrt{2a2b} \cdot t}{gm}$, la quale siccome infinitesima sta a BP come il protonumero AB $= 1$ alla sottotangente a. Il perchè $\frac{\sqrt{2a2b} \cdot t}{gm} : BP :: 1 : a$, e quindi $BP = \frac{\sqrt{2a2b} \cdot at}{gm}$; ma $BP = AK =$ $\log. KL = \log.\left(1 + \frac{\sqrt{2a2b} \cdot t}{gm}\right)$; dunque $\log.\left(1 + \frac{\sqrt{2a2b} \cdot t}{gm}\right) = \frac{\sqrt{2a2b} \cdot at}{gm}$. Sostituito questo valore nella formola $\frac{as}{gm} = \log.\left(1 + \frac{\sqrt{2a2b} \cdot t}{gm}\right)$ si avrà finalmente $\frac{as}{gm} = \frac{\sqrt{2a2b} \cdot at}{gm}$, o sia

$s = t\sqrt{2a2b}$, che è la vera formola di co: mette la relazione tra lo spazio, ed il tempo, quando il corpo si muove colla velocità equabile $\sqrt{2b}$. In fatti sendo nel moto equabile lo spazio in ragion composta del tempo e della velocità, e scorrendo il corpo lo spazio $2a$ nel tempo 1 colla velocità costante $\sqrt{2a}$, si avrà la analogia $s : t\sqrt{2b} :: 2a : 1.\sqrt{2a} :: \sqrt{2a} : 1$ da cui nasca la sovrascritta equazione

$s = t\sqrt{2a2b}$.

Il metodo dichiarato di ridurre la formola consueta alle misure nota è secondo me l'ottimo, e quello di cui

mi

si ch...

Dalla riduzione delle formole mi servo costantemente. In essa adattandomi all'indole delle solite formole, quando $f=m$, esprimo la velocità per la radice del doppio spazio, da cui cadendo il mobile ne fa acquisto. Non dissimulo che alcuni dinotano la velocità guadagnata in un minuto secondo da un grave per lo spazio doppio di quello, da cui discende il corpo, il qual doppio spazio si scorrerebbe in pari tempo colla terminale costante velocità. Secondo questa maniera di indicare la velocità le quattro formole ridotte alle figure note prendono il seguente aspetto (1.) $2afds = mudu$, (2.) $\frac{ds}{dt} = u$, (3.) $2afdt = mdu$, (4.) $2afdt^2 = mdds$. L'integrazione della (1), ponendo $f=m$, ci dà $4as = u^2$, e se $s=a$, $2a=u$. Integrando la (3) abbiamo $2at=u$, e quando $t=1$, $2a=u$. La formola (4) doppiamente integrata somministra $at^2=s$, $t\sqrt{a}=\sqrt{s}$, e qualora $t=1$, determina $s=a$, cioè s eguale all'altezza a, nel discendere dalla quale con moto accelerato si consuma un minuto secondo. Essa formola quarta, in cui la velocità non ha luogo, è comune ad entrambi i metodi, e quindi valendosi dell'uno, o dell'altro si perviene alla stessa meta, quando si tratta di scoprire la relazione tra lo spazio, ed il tempo.

Io non soglio porre in opera sì fatte riduzioni

riduzioni, perchè se nel valore della forza variabile ci entra la velocità, come negli esempj primo e secondo, si richiede molta cautela per non cadere in paralogismo. La velocità nella formola ridotta conforme il secondo metodo dee corrispondere a quella della formola ridotta conforme il primo come $u : \sqrt{ra}$, o come $\sqrt{ra} : 1$, e perciò la velocità u nella formola ridotta seguendo il secondo metodo dee dividersi per $\sqrt{ra}$, se si hanno da pareggiare le partite, e se le formole (1), (2), (3) ridotte giusta il metodo secondo ci hanno da guidare alla [illegible] comune ad entrambi i metodi.

Mi metto sotto gli occhi la formola non ridotta dell'esempio I. $m - \frac{u^2}{g} . ds = mudu$, nella quale il primo metodo non mette mano. Volendo ad essa applicare il secondo metodo, dividasi tanto u, quanto du per $\sqrt{ra}$, onde ne risulta

$$m - \frac{u^2}{rag} . ds = \frac{mudu}{ra}, \text{ o sia}$$

$ragm - u^2 . ds = gmudu$. Ma perchè il secondo metodo richiede la formola $\frac{ds}{dt} = u$, ovvero $ds = udt$, sostituito in cambio di ds questo valore ne proverrà $ragmu - u^3 . dt = gmdu$. Col maneggio delle due formole esprimenti lo spazio, ed il tempo per una funzione della velocità si perverrà a quella stessa formola

$$\frac{as}{gm} = \log.\left(e^{\frac{2at\sqrt{ra}}{\sqrt{gm}}} + 1\right) - \log.2 - \frac{at\sqrt{ra}}{\sqrt{gm}}$$

che abbiamo scoperta col primo metodo.

Della riduzione delle formola

La formola $\frac{udt}{g}$ = medio dal secondo esempio rimane intatta, dovendosi dividere tutto ciò, quanto ... Avverto che la integrazione si deve effettuare così $\frac{as}{gm} = \log.\frac{\sqrt{2a2b}}{u}$ nella logaritmica della sottotangente = a, prendendo come ... la unità. La velocità primitiva del corpo m si suppone uguale a quella, che acquisterebbe un grave discendendo dall'altezza b, la qual velocità conforme il secondo metodo si esprime per $\sqrt{2a2b}$.

La sostituzione di udt in cambio di uds somministra l'equazione $\frac{dt}{gm} = -\frac{du}{u^2}$, ed integrando $\frac{t}{gm} = \frac{1}{u} - \frac{1}{\sqrt{2a2b}}$, o sia $1 + \frac{t\sqrt{2a2b}}{gm} = \frac{\sqrt{2a2b}}{u}$. Nella formola $\frac{as}{gm} = \log.\frac{\sqrt{2a2b}}{u}$ pongo in vece di $\frac{\sqrt{2a2b}}{u}$ il ritrovato valore, ed accordandosi il secondo col primo metodo mi si presenta $\frac{as}{gm} = \log.\left(1 + \frac{t\sqrt{2a2b}}{gm}\right)$

Per vie più rischiarare questa importante materia, soggiungo il terzo esempio.

Esempio III.

Un grave, il cui peso paragonato alla massa m, sia ritardato nel discendere dalla resistenza $\frac{u}{g}$ proporzionale alla velocità, si dimanda la relazione tra gli spazj passati ed i tempi spesi in passarli, prendendo un minuto secondo per unità.

alla misura consueta.

La consueta formola dello spazio riferito alla velocità, in cui il primo metodo non mette mano, si è la seguente $\frac{\overline{m-u}}{g} \cdot ds = mudu$; Volendo nel ridurla alle misure note seguitare il secondo metodo, si divida u, e du per $\sqrt{ra}$, onde abbiasi $\frac{\overline{m-u}}{g\sqrt{ra}} \cdot ds = \frac{mudu}{ra}$, ovvero $ra\,ds = \frac{gm\sqrt{ra} \cdot udu}{gm\sqrt{ra} - u}$

$= g^2m^2ra \cdot \frac{du}{gm\sqrt{ra} - u} - gm\sqrt{ra} \cdot du$, e moltiplicando per a sottotangente della logaritmica delle tavole

$ra\,a\,ds = g^2m^2ra \cdot \frac{adu}{gm\sqrt{ra} - u} - agm\sqrt{ra} \cdot du$.

Passo ad integrare, aggiungendo la necessaria costante, acciocchè ad $s = 0$ corrisponda $u = 0$, e trovo

$ra\,s = g^2m^2ra \cdot \overline{\log gm\sqrt{ra} - \log \cdot gm\sqrt{ra} - u}$

$- \sqrt{ra} \cdot agmu = g^2m^2ra \cdot \log\left(\frac{gm\sqrt{ra}}{gm\sqrt{ra} - u}\right)$

$- \sqrt{ra} \cdot agmu$, o dividendo per $\sqrt{ra}$

$as\sqrt{ra} = g^2m^2\sqrt{ra} \cdot \log\left(\frac{gm\sqrt{ra}}{gm\sqrt{ra} - u}\right) - agmu$.

I logaritmi si deggiono prendere nella logistica dalle tavole. Noto che $gm\sqrt{ra}$ sarebbe la massima velocità, a cui soltanto potrebbe acquistare il grave dopo essere disceso da un'altezza infinita. Lo stesso grave discendendo nel vano guadagnerebbe la predetta velocità cadendo dalla sublimità g^2m^2.

Nella formola differenziale ridotta $ra\,ds = \frac{gm\sqrt{ra} \cdot udu}{gm\sqrt{ra} - u}$ pongo udu in

luogo

Dalla riduzione della formola

luogo di ds, e ne risulta $\frac{\sqrt{ra}\cdot dt}{gm} = \frac{du}{gm\sqrt{ra}-u}$, e moltiplicando per a,

$\frac{\sqrt{ra}\cdot adt}{gm} = \frac{adu}{gm\sqrt{ra}-u}$, e conseguentemente integrando $\frac{\sqrt{ra}\cdot at}{gm} = \log.\left(\frac{gm\sqrt{ra}}{gm\sqrt{ra}-u}\right)$ nella logistica dalle tavole fornita della sottotangente $= a$, e formandi i conti come proponemmo.

Facendo ritorno dai logaritmi ai numeri avremo $c^{\frac{\sqrt{ra}\cdot at}{gm}} = \frac{gm\sqrt{ra}}{gm\sqrt{ra}-u}$,

e dopo breve calcolo $gm\sqrt{ra}\left(\frac{c^{\frac{at\sqrt{ra}}{gm}}-1}{c^{\frac{at\sqrt{ra}}{gm}}}\right) = u$.

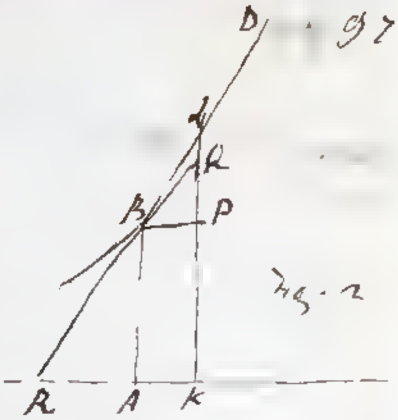
Nella formola $as\sqrt{ra} = g^2m^2\sqrt{ra}\,\log.\left(\frac{gm\sqrt{ra}}{gm\sqrt{ra}-u}\right) - agmu$, colloco in cambio di $\log.\left(\frac{gm\sqrt{ra}}{gm\sqrt{ra}-u}\right)$ e di u i loro valori testè determinati, ed ho

$$as\sqrt{ra} = gm\sqrt{ra}\cdot at\sqrt{ra} + ag^2m^2\sqrt{ra}\left(\frac{c^{\frac{at\sqrt{ra}}{gm}}-1}{c^{\frac{at\sqrt{ra}}{gm}}}\right)$$

e dividendo per $\sqrt{ra}\,.\,a$

ossia $s = gmt\sqrt{ra} + g^2m^2\left(\frac{c^{\frac{at\sqrt{ra}}{gm}}-1}{c^{\frac{at\sqrt{ra}}{gm}}}\right)$

$= gmt\sqrt{ra} - g^2m^2 + \frac{g^2m^2}{c^{\frac{at\sqrt{ra}}{gm}}}$, formola esprimente la cercata relazione fra lo spazio s scorso dal grave nel ritardato dalla resistenza $\frac{u}{g}$, ed il tempo t numerato con minuti secondi, che si è consumato nello scorrere lo spazio predetto.



alla misura conosciuta.

Il primo metodo ci avrebbe condotto alla medesima formola, la verità della quale apparirà maggiormente, facendo vedere, che posto $g = \infty$, onde si dilegui la resistenza $\frac{u}{g}$, ci dà essa formola $s = at^2$. Sia (fig. 2.) BLD la logaritmica della tavola; $AB = 1$ il protonumero. Taglio l'infinitesima ascissa $AK = \frac{at\sqrt{2a}}{gm}$, a cui corrisponda l'ordinata $KL = c^{\frac{at\sqrt{2a}}{gm}}$, e segnata $AR = a$ sottotangente di essa logaritmica, conduco la tangente RBQ, che intersecherà l'ordinata KL nel punto Q. Dal punto B deducasi BP parallela ad RK. Chiamata $AB = y$, $AK = dx$, abbiamo l'equazione $\frac{y\,dx}{a} = dy$, e differenziando supposta dx costante, $\frac{dy\,dx}{a} = ddy$: ma $dy = \frac{y\,dx}{a}$; dunque $\frac{y\,dx^2}{a^2} = ddy$, e perciò $\frac{y\,dx^2}{2a^2} = \frac{ddy}{2}$. Egli è noto uguagliarsi QL alla metà della seconda differenza delle ordinate. Per la qual cosa avremo $QL = \frac{ddy}{2} = \frac{y\,dx^2}{2a^2}$, e giacchè nel caso presente $y = 1$, $dx = \frac{at\sqrt{2a}}{gm}$, $QL = \frac{at^2}{g^2m^2}$. La similitudine dei triangoli RAB, BPQ somministra l'analogia $RA = a : AB = 1 :: BP = \frac{at\sqrt{2a}}{gm} : PQ$ ossia $= \frac{t\sqrt{2a}}{gm}$. Sarà pertanto $c^{\frac{at\sqrt{2a}}{gm}} = KL = KP + PQ + QL = 1 + \frac{t\sqrt{2a}}{gm} + \frac{at^2}{g^2m^2}$. Sostituito questo valore nella formola $s =$

gm

Finita li 20 Agosto 1771.

$gmt\sqrt{2a} - g^2m^2 + \frac{g^2m^2}{1+\frac{t\sqrt{2a}}{gm}}$, ne proverrà

$$s = gmt\sqrt{2a} - g^2m^2 + \frac{g^2m^2}{1+\frac{t\sqrt{2a}}{gm}+\frac{at^2}{g^2m^2}}$$

, e riducendo allo stesso denominatore

$$s = \frac{gmt\sqrt{2a} + 2at^2 + \frac{t^3a\sqrt{2a}}{gm} - g^2m^2 - gmt\sqrt{2a} - at^2 + g^2m^2}{1+\frac{t\sqrt{2a}}{gm}+\frac{at^2}{g^2m^2}}$$

e cancellando i termini, che si elidono, ed il termine relativamente nullo $\frac{t^3a\sqrt{2a}}{gm}$ nel numeratore, e considerando essere il denominatore adequatamente $= 1$, $s = at^2$; il che &c.

Epilogando le cose dette, il primo metodo suppone, che cadendo un grave nel vuoto dall'altezza s, la velocità guadagnata si esprima per $\sqrt{2s}$, nulla in ciò discostandosi dalle formole consuete. Il secondo metodo la fa uguale a $\sqrt{2as}$, onde venga essa dinotata, quando $s = a$, e $t = 1$, dallo spazio $2a$, che conservandosi la predetta velocità costante si passerebbe nel tempo $t = 1$. Non altera il primo metodo la formola (1) $fds = mudu$, e riduce il tempo in secondi, moltiplicando nelle altre formole dt per $\sqrt{2a}$. Per non avere ponendo in opera il secondo metodo, fa di uopo sostituire in cambio di f il suo valore nella formola $fds = mudu$, e poscia dividere u, e dt per $\sqrt{2a}$, e col mezzo della formola $\frac{ds}{dt} = u$, in cui questo metodo non mette mano, passar indi a determinare le altre due formole.

Lettera al Ch.[mo] Sig.[r] Ab. Contarelli,
in cui si dimostra l'asserzione del celebre Galileo
che un grave discende per un quadrante
di circolo in tempo più breve
che per la sua corda

Lettera del Signor Co. Giordano Riccati al ch. Signor Ab. Giuseppe Contarelli; in cui ~~si~~ dimostra l'asserzione del celebre Galileo, che un grave discende per un quadrante di circolo in tempo più breve che per la sua corda.

Il rinomatissimo Galileo Galilei dopo aver dimostrato nella Propos.^na^ 36. del terzo Dialogo intorno a due nuove scienze attinenti alla Meccanica, ed ai Movimenti Locali, che la discesa per le due corde (Fig. 1.) DE, EB si fa più presto, che per la DB corda del quadrante, nello Scolio susseguente procede avanti così. Posto che il corpo debba cominciar a discendere dal punto D, il tempo per DE, EB è minore che per DA; ma egli è verisimile, che il tempo per EF, FB sia più breve che per EB; dunque il tempo per DE, EF, FB è più breve che per DE, EB, e così il tempo per DE, EF, FG, GA più breve che per le tre corde DE, EF, FA, e così seguentemente. Il perchè moltiplicandosi, ed impiccolendosi le corde all'infinito, ~~e confondendo~~ ed equivalendo il poligono di infiniti lati al quadrante; il tempo pel quadrante DB sarà minore di quello per la corda corrispondente.

Ella riflette ottimamente stimat.^mo^ Sig. Abate, che l'asserzione del Galilei si appoggia soltanto ad una certa verisimilitudine, e richiede di essere confermata con una rigorosa dimostrazione. Mi è caduto primieramente in pensiero di dividere il quadrante DA in parti eguali 2, 4, 8 &c., e condotte le relative corde 1, 2, 4, 8 &c., ho fatto vedere, che l'unica corda si scorre in tempo maggior dalle due (

(supposto

(supposto che nel transito da corda a corda non si perda velocità) che le due corde si scorrono in tempo maggior delle quattro, ed ho aperta la strada a dimostrare collo stesso metodo, che le quattro corde si scorrono in tempo maggior delle otto &c., e che finalmente il quadrante DA si passa in tempo minore di quello speso a percorrere qualunque numero di corde eguali ad esso adattate. Questa dimostrazione riesce alquanto prolissa, ed il lettore può non restare pienamente contento; perchè insegno è vero il metodo per provare che le otto corde si scorrono in tempo più breve delle quattro, le sedici in tempo minore delle otto, ma tralascio poi le dimostrazioni, che richiedono computi troppo lunghi, e nojosi. Seguitando a meditare per iscoprire una più spedita, ed elegante dimostrazione, mi si è affacciata la seguente, di cui mi terrò interamente pago, quando giunga ad ottenere la sua autorevole approvazione.

Sia DEA (Fig. 2.) un quadrante di circolo, il cui raggio $CD = a$. Si trovi il corpo nel punto E, e tirata l'ordinata $Ee = y$, ponga la corrispondente ascissa $Ce = x$. Chiamata f la forza tangenziale acceleratrice nel punto E, abbiamo $f = \frac{KE}{CE} = \frac{x}{a}$. Inoltre la velocità nel punto E, che nomino $u = \sqrt{(2 \cdot eE)} = \sqrt{2y}$. Nella nota formola $dt = \frac{du}{f}$ sostituisco i valori di $f = \frac{x}{a}$, e di $du = \frac{dy}{\sqrt{2y}}$, e mi si presenta $dt = \frac{a}{x} \cdot \frac{dy}{\sqrt{2y}}$.

Tirata la verticale $CB' = 2a$ (Fig. 3.), e l'orizzontale $Cv = \sqrt{2a}$, col parametro $= 1$ descrivo la parabola conica CPV, nella quale posta $CK' = 2y$, sarà $K'P = Cp = \sqrt{2y}$. Supposto, che $CK' = 2y$ sia doppia di $CK = y$ della Fig. 2., il valore corrispondente di x sarà Ce.

Faccio

Faccio $\frac{a}{x} = z$, e perciò $a = xz$, e poscia conduco (fig. 4.) l'orizzontale $CD = a$, e la verticale indefinita Czu, a cui sia parallela $Dzc = z$. Col rettangolo costante $CDzc$ delineata l'iperbola fra gli assintoti $zczpzu$, a $Ce = x$ corrisponderà $ezp = z = \frac{x}{a}$: ma a $Ce = x$ (fig. 2.) si riferisca $CK = y$, e (fig. 3.) $Cp = \sqrt{2y}$; dunque a $Cp = \sqrt{2y}$ dee riferirsi (fig. 4.) $ezp = z = \frac{a}{x}$. Dal punto p (fig. 3.) si conduca la verticale pzp $= \frac{a}{x} = ezp$ della fig. 4., ed il punto zp, ed altri similmente determinati apparterranno alla curva (fig. 3.) $zczpzu$, la cui quadratura $zczpzuuC$ si eguaglia al tempo t speso dal grave a discendere pel quadrante (fig. 2.) DEB.

Per far toccar con mano, che cotal tempo è minore di quello $2\sqrt{a}$, che il grave spende a scorrere la corda DB, ecco il metodo, di cui mi servo. Faccio $iI = y = a - q$, onde si abbia $dy = -dq$, e $\frac{dy}{\sqrt{2y}} = \frac{-dq}{\sqrt{(2a-2q)}}$. Sostituisco questi valori nella formola $\frac{a}{x}\cdot\frac{dy}{\sqrt{2y}} = dt$, e trovo $dt = \frac{-a\,dq}{x\sqrt{(2a-2q)}}$. Poichè $x = \sqrt{(a^2-y^2)} = \sqrt{(2aq-q^2)}$, surrogato tal valore, ne risulta $dt = \frac{-a\,dq}{\sqrt{(2aq-q^2)}\cdot\sqrt{(2a-2q)}}$ $= \frac{-a\,dq}{\sqrt{(4a^2q-6aq^2+2q^3)}}$. Se q si supponga sempre fisicamente minima, onde si possano trascurare i termini $-6aq^2+2q^3$, avremo $dt = \frac{-a\,dq}{\sqrt{(4a^2q)}}$ $= \frac{-dq}{2\sqrt{q}}$, e passando all'integrazione, $t = \sqrt{g} - \sqrt{q}$, e quando $q = 0$, $t = \sqrt{g}$, supposto sempre, che g sia grandezza fisicamente minima.

Sia per esempio $g = \frac{a}{100}$, e conseguentemente $iI = y = a\cdot\frac{99}{100}$. Ciò posto avremo (fig. 3.) $CO' = 2y = a\cdot\frac{198}{100}$, ed $O'T = Ct = \frac{\sqrt{a}\sqrt{198}}{10}$ $= \sqrt{a}\cdot 1,40710$. Il valore di x corrispondente ad

ad

ed $y = a \cdot \frac{99}{100}$ sarà $x = \sqrt{(a^2 - a^2 \cdot \frac{9801}{10000})} = \frac{a\sqrt{199}}{100}$ $= a \cdot 0{,}141067$, ed $\frac{a}{x} = 2 = \frac{1000000}{141067} =$ $7{,}08883 = tnt$. Essendo $CV = \sqrt{a}\sqrt{2} =$ $\sqrt{a} \cdot 1{,}41421$, e $CI = \sqrt{a} \cdot 1{,}40710$, resta $IV =$ $\sqrt{a} \cdot 0{,}00711$. Avremo l'aja $rtvrv = t =$ $\sqrt{z} = \sqrt{a} \cdot \frac{1}{10} = \sqrt{a} \cdot 0{,}1$, valore che cala dal giusto per una quantità fisicamente trascurabile.

Vado presentemente in traccia di un valore dell'aja predetta, che superi l'esatto per una minuzia. Avendo nella formula $\frac{-a\,dq}{\sqrt{(4a^2q - 6aq^2 + 2q^3)}}$ trasandato $-6aq^2 + 2q^3$ rispettivamente a $4a^2q$, rifletto che $4a^2q - 6aq^2 + 2q^3 : 4a^2q$ sta in ragione di $4a^2 - 6aq + 2q^2 : 4a^2$. Se $q = \frac{a}{100}$, ne risulta la detta proporzione come $4a^2 - \frac{6a^2}{100} + \frac{2a^2}{1000} : 4a^2$ $:: 39402 : 40000$, e se $q = 0$, essa ragione si converte in egualità. Presa dq costante, l'aja elementari $\frac{-dq}{\sqrt{(4a^2q - 6aq^2 + 2q^3)}}$ stanno come $\frac{1}{\sqrt{(4a^2q - 6aq^2 + 2q^3)}}$, e trascurati i termini $-6aq^2 + 2q^3$, come $\frac{1}{\sqrt{(4a^2q)}}$. Postochè fosse costante la ragione fra gli elementi dell'aja supposta, e della vera come $\frac{1}{\sqrt{(40000)}} : \frac{1}{\sqrt{(39402)}}$ $:: \sqrt{(39402)} : \sqrt{(40000)} = 200$, ne proverrebbe l'aja supposta alla vera come $\sqrt{(39402)} :$ 200 : ma l'aja supposta $= \sqrt{z} = \frac{\sqrt{a}}{10}$; dunque col mezzo dell'analogia $\sqrt{(39402)} : 200$ $:: \frac{\sqrt{a}}{10} : \frac{20\sqrt{a}}{\sqrt{(39402)}} = \sqrt{a} \cdot 0{,}1007561751$ si determinerebbe il valore dell'aja vera. Si cavi la conseguenza, che non essendo costante la ragione $\sqrt{(39402)} : 200$, fra gli elementi dell'aja supposta, e della vera, i quali si vanno gradatamente accostando all'eguaglianza, l'aja vera (Fig. 3.) $rtvrv$ esser dee minore di $\sqrt{a} \cdot 0{,}1007561751\ldots$, e star di mezzo fra

un tal

un tal valore, e quello di $\sqrt{g} = \sqrt{a}.0,1$.

Per determinare un valore alquanto più grande dell'aja CtrtrsrvqrprcC, mi vaglio del seguente metodo. Divido la linea $CA' = 2a$ nelle parti $CK' = a.\frac{1}{2}$, $CL' = a.1$, $CM' = a.\frac{3}{2}$, $CN' = a.\frac{7}{4}$, $CO' = a.\frac{198}{100}$, e ne risulterà

Fig. 3.

$$\begin{aligned}
Cp &= \sqrt{a}.\tfrac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{a}\tfrac{\sqrt{2}}{2} &&= \sqrt{a}.0,7071\\
Cq &&&= \sqrt{a}.1,0000\\
Cv &= \sqrt{a}\tfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \sqrt{a}\tfrac{\sqrt{6}}{2} &&= \sqrt{a}.1,22475\\
Cs &= \sqrt{a}\tfrac{\sqrt{7}}{2} &&= \sqrt{a}.1,40294\\
Ct &= \sqrt{a}\tfrac{\sqrt{198}}{10} &&= \sqrt{a}.1,40710\\
pq &= Cq - Cp &&= \sqrt{a}.0,2929\\
qv &= Cv - Cq &&= \sqrt{a}.0,22475\\
vs &= Cs - Cv &&= \sqrt{a}.0,17819\\
st &= Ct - Cs &&= \sqrt{a}.0,00416
\end{aligned}$$

Fig. 2.

$$\begin{aligned}
Ca &= \sqrt{((CE)^2-(aE)^2)} = \sqrt{(a^2 - \tfrac{1}{16}a^2)} = \tfrac{a.\sqrt{15}}{4} = a.0,96824\\
Cf &= \sqrt{((CF)^2-(fF)^2)} = \sqrt{(a^2 - \tfrac{1}{4}a^2)} = \tfrac{a.\sqrt{3}}{2} = a.0,866025\\
Cg &= \sqrt{((CG)^2-(gG)^2)} = \sqrt{(a^2 - \tfrac{9}{16}a^2)} = \tfrac{a.\sqrt{7}}{4} = a.0,701471
\end{aligned}$$

~~[illegible]~~

$$\begin{aligned}
Ch &= \sqrt{((CH)^2-(hH)^2)} = \sqrt{(a^2 - \tfrac{49}{64}a^2)} = \tfrac{a\sqrt{15}}{8} = a.0,48412\\
Ci &= \sqrt{((CI)^2-(iI)^2)} = \sqrt{(a^2 - \tfrac{9801}{10000})} = \tfrac{a\sqrt{199}}{100} = a.0,141067
\end{aligned}$$

Fig. 3.

$$\begin{aligned}
prp &= \tfrac{a}{x} &&= 1,03280\\
qrq &= \tfrac{a}{x} &&= 1,15470\\
vrv &= \tfrac{a}{x} &&= 1,42557\\
srs &= \tfrac{a}{x} &&= 2,06560\\
trt &= \tfrac{a}{x} &&= 7,08883
\end{aligned}$$

Suppongo ora tirate le corde rcrp, rprq, rqrv, rvrs, rsrt, e metto a computo l'aja dei trapezj rcp, rpq, rqv, rvs, rst, le quali sono una mica maggiori della corrispondenti aja chiuse da tre linee rette, e da un pezzo di curva, e trovo

$$\begin{aligned}
rcp &= \left(\tfrac{Cac+prp}{2}\right).Cp = 1,01640 \,.\, 0,7071.\sqrt{a} = 0,718696440.\sqrt{a}\\
rpq &= \left(\tfrac{prp+qrq}{2}\right).pq = 1,09375 \,.\, 0,2929\sqrt{a} = 0,320359375.\sqrt{a}\\
rqv &= \left(\tfrac{qrq+vrv}{2}\right).qv = 1,290135 \,.\, 0,22475\sqrt{a} = 0,2899574\,[illegible].\sqrt{a}\\
rvs &= \left(\tfrac{vrv+srs}{2}\right).vs = 1,745545 \,.\, 0,17819\sqrt{a} = 0,311045791.\sqrt{a}\\
rst &= \left(\tfrac{srs+trt}{2}\right).st = 4,577215 \,.\, 0,00416\sqrt{a} = 0,019041214.\sqrt{a}\\
&= 1,659100661.\sqrt{a}
\end{aligned}$$

e la somma di questi trapezj

L'aja Gtatsrzvgzpzcl è minore della somma dei sovrascritti impari = 1,859100661 √a: ma parimente l'aja zttvzr
è minore dalla quantità = 0,1003561735 √a; dunque l'aja totale = zcipzvvl = t < 1,7594564361 √a. E poichè quest'ultima grandezza è minore di 2√a tempo, in cui il grave discende per la corda DB (fig. 1.), se ne deduce, che ancora più breve di 2√a, è il tempo t impiegato dal corpo a percorrere il quadrante DEFGB. Egli è dunque chiaramente provato, che il tempo pel quadrante è minore di quello per la corda.

Aggiungo presentemente alcune non inutili riflessioni. Ha dimostrato l'Ab. Vincenzo Riccati mio fratello nel suo Tomo I. di Opuscoli pag. 164., che un arco minimo GA di circolo si passa da un grave, principiando dalla quiete, in tempo finitamente minore di quello, che impiega nel viaggiare per la sua corda, e che questi tempi stanno in ragione della circonferenza del quadrante al diametro del circolo, cioè prossimamente come 355 : 452 : ma il tempo per la corda = 2√a; dunque col mezzo dell'analogia 452 : 355 :: 2√a : $\frac{710\sqrt{a}}{452}$ = 1,5707965 √a determineremo il tempo della discesa per l'archetto GB eguale a 1,5707965 √a.

Ha di più provato il mentovato mio fratello alla pag. 165., che il tempo per un arco maggiore è più lungo di quello per un arco minore; e quindi affatto manifesto il quadrante DEFGB si scorre in tempo maggiore, paragonato collo arco minimo GA. Crescendo gli archi, crescono i tempi sì fattamente, che diviene infinito, il tempo della

discesa

discesa per ~~tut~~ l'arco aDB, che differisca dal semicircolo per l'arco menomissimo Aa. Suppongo l'arco aDB infinitamente poco calante dal semicircolo, acciocchè il pendolo possa cominciar a discendere.

Segno l'arco AH, e pel punto H conduco il seno HI, ed il raggio HC. Ho di sopra notato, che la forza tangenziale acceleratrice pareggia $\frac{IH}{CH}$, cioè a dire il seno diviso pel raggio. Suppongo l'arco Aa infinitesimo del secondo ordine, e l'arco AH infinitesimo dell'ordine primo. In tal ipotesi gli archi sono eguali ai seni; e quindi le forze tangenziali acceleratrici $\frac{IH}{CH}$ si eguagliano ad $\frac{AaH}{CH}$, ossia ai relativi spazj divisi pel raggio. Avremo dunque, chiamato s lo spazio AaH, $s\,ds$ / [illegible] $= u\,du$, e perciò $\frac{s}{\sqrt{a}} = u$. Rigorosamente procedendo dovrebbe essere $\frac{AaH - Aa}{\sqrt{a}} = u$: ma $AaH - Aa = AaH = s$; dunque adequatamente $\frac{s}{\sqrt{a}} = u$. E poichè $\frac{ds}{u} = dt$, $\frac{ds}{s}\sqrt{a} = dt$, ed integrando, $t = \log. s$ nella logaritmica della suttangente $= \sqrt{a}$, e preso per protonumero lo spazietto $s = Aa$. Si intenda delineata una tal logaritmica, a cui si adattino le ordinate $KL = Aa$, $MN = AaH$. Ora $Aa : AaH$ ha una ragione minore di qualunque data; dunque per la natura della curva descritta l'intercetta KM dinotante il tempo è infinita, e conseguentemente a passare l'arco aH si richiede un tempo infinito. Ma l'arco $aHDFB$ si scorre dal pendolo in tempo più lungo dell'arco aH; dunque l'arco $aHDFB$ si passa in tempo infinito, che supera immensamente il tempo dato $= 2\sqrt{a}$ impiegato a discendere per la corda aB.

E conciossiachè e l'arco minimo GB, ed il quadrante DFB si percorrono in minor tempo

dalla

dalla loro corda; ne segue necessariamente, che vi ha da essere un arco ODFA, che paragonato colla sua corda, si scorra nel tempo noto = 2Va, in cui un grave discende per qualunque corda tirata dal punto infimo A del circolo ad un altro punto del medesimo. Avendo io dimostrata la proposizione del Galileo, che un quadrante si passa in tempo minore di quello, che un grave impiega a discendere per la sua corda, l'arco predetto ODFA starà di mezzo fra il semi-circolo, ed il quadrante.

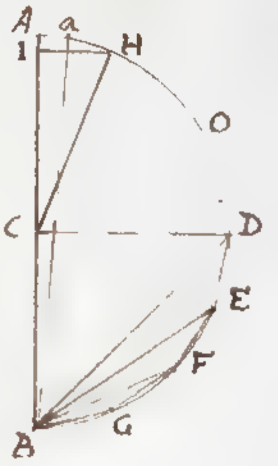


Fig. 1.

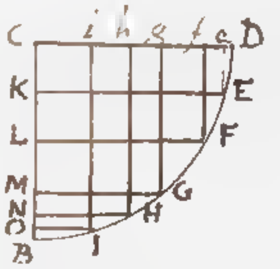


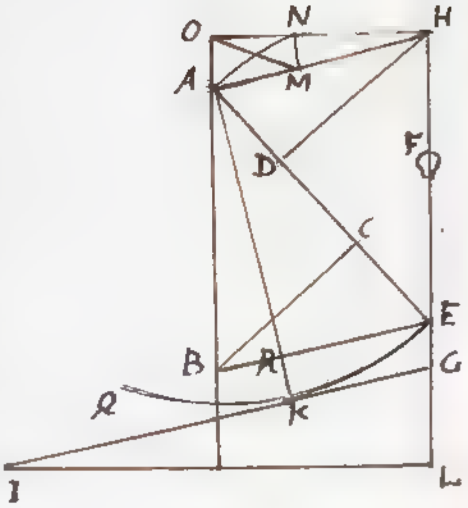
Fig. 2.

Fig. 3.

H
E
G
L

Determinare la forza necessaria acciocchè la ruota d'un carro superi un intoppo in una strada ascendente, e cui sia parallela detta forza

Determinare la forza necessaria, acciocchè la ruota di un carro superi un intoppo, che si incontri in una strada ascendente, a cui sia parallela la detta forza.



Sia IL una linea orizzontale, con cui la strada ascendente faccia l'angolo GIL. La ruota QKE, il cui raggio AK, tocchi la strada nel punto K, e per conseguenza sia retto l'angolo AKI. Incontri la detta ruota l'intoppo GE; si cerca la forza parallela alla strada applicata in A capace di per sè, che l'intoppo si superi. Si conduca EB parallela a GI, che venga tagliata in B dalla verticale AB. Compio il parallelogramma ABEH, e meno la diagonale AE uguale al raggio del circolo QKE, alla qual diagonale siano normali le rette BC, HD, che sono fra loro eguali per la proprietà del parallelogrammo. Ora io affermo, che se all'asse A della ruota sarà addossato un peso proporzionale ad AB, una forza parallela alla strada proporzionale ad AH, che tenta di superare l'intoppo EG, farà equilibrio col detto peso, dimodochè accrescendola alquanto resterà vinto l'intoppo.

La forza AB si risolve nelle due AC premente l'intoppo inammovibile EG, CB che tenta di muovere il punto A per la direzione CB. Non altrimenti la forza AH si risolve nelle due AD premente l'intoppo EG, DH, che procura di muovere il punto A per la direzione DH: ma queste forze sono eguali, e contrarie; dunque mutuamente si elidono, e non potendo il punto A concepir movimento, chiaramente

si

si scopre, che si equilibrano le forze, che stanno in ragione di AB ad AH; il che &c.

Si può ancora sciogliere questo Problema col sicuro metodo delle Azioni. Se la forza AH parallela alla strada IG ha da vincere l'intoppo EG, egli è necessario, che il raggio AE della ruota si giri intorno al punto E. Descriva un tal raggio il minimo archetto AN. La forza parallela alla strada si eguagli al peso F, che mediante la fune inestendibile AHF, che passa per la carrucola H, tiri il punto A. Giunto che sia questo in N, col raggio HN si descriva l'archetto NM, ed a chiaro lume si vede, che il peso F è disceso per lo spazio AM, e che per conseguenza la forza parallela alla strada, che si suppone uguale al peso F, ha esercitata l'azione F.AM. Dal punto N si conduca l'orizzontale NO, che tagli nel punto O la verticale AA continuata, e quando il punto A sarà pervenuto in N, il peso P che lo preme si sarà alzato per lo spazietto AO, ed avrà esercitata la reazione P.AO. Supposto che stiano in equilibrio il peso P, e la forza F parallela alla strada, si dovrà avere P.AO = F.AM, e conseguentemente P : F :: AM : AO. Si delinei la diagonale OM.

Essendo retto l'angolo EAN, i due angoli AAE, OAN formano un retto: ma anche la somma dei due angoli OAN, ONA si eguaglia ad un retto; dunque gli angoli AAE, ONA sono eguali. Poichè sono retti gli angoli O, M, un circolo descritto col diametro AN passa pei punti A, O, N, M;

e

e quindi sono eguali gli angoli ONA, OMA, che insistono sopra lo stesso arco, la cui corda AO. Il perchè si agguagliano gli angoli BAE, OMA; ed essendo nei triangoli ABE, MAO parimente eguali gli angoli ABE, MAO, i predetti triangoli sono simili, e perciò ne nasce l'analogia BA : AE :: AM : AO : ma AM : AO :: P : F; dunque BA : AE :: P : F, e conseguentemente il peso P, e la forza F staranno in equilibrio, quando si corrispondano in ragione di BA : AE = AH, come appunto si è trovato nella prima soluzione.

Con facilità si esprimeranno analiticamente le linee BA, AE proporzionali alla forza equilibrata P, F. Sieno il raggio della ruota AK = a, l'altezza dell'intoppo normale alla strada IG, cioè KR = b, onde resti AR = a-b, e per la natura del circolo RKE, avremo $RE = \sqrt{(2ab-b^2)}$. Sia la lunghezza del piano inclinato GI = m, e la e la corrispondente ascesa LG = n, e perciò $IL = \sqrt{(m^2-n^2)}$. La similitudine dei triangoli IGL, ABR mi somministra l'analogia

$$IL : LG :: AR : RB$$
$$\sqrt{(m^2-n^2)} : n :: a-b : \frac{n.(a-b)}{\sqrt{(m^2-n^2)}},$$

che determina $RB = \frac{n.(a-b)}{\sqrt{(m^2-n^2)}}$. Avremo pertanto $BE = BR + RE = \frac{n.(a-b)}{\sqrt{(m^2-n^2)}} + \sqrt{(2ab-b^2)}$.

Per iscoprire il valor analitico di BA, si osservi essere

$$LG : GI :: BR : BA,$$
$$n : m :: \frac{n.(a-b)}{\sqrt{(m^2-n^2)}} : \frac{m.(a-b)}{\sqrt{(m^2-n^2)}}$$

analogia, che stabilisce $BA = \frac{m.(a-b)}{\sqrt{(m^2-n^2)}}$.

Dovrà

Dovrà dunque stare

$$P : F :: \frac{m.(a-b)}{\sqrt{(m^2-n^2)}} : \frac{n.(a-b)}{\sqrt{(m^2-n^2)}} + \sqrt{(2ab-b^2)}$$

Sia giusta l'esempio recato dal Co. Luigi Rizzetti nella sua Riforma de' Carri, pag. 105. $AK = a = 25$, $KR = b = 3$, $m : n :: 4 : 1$, e si troverà

$$P : F :: \frac{4.22}{\sqrt{(15)}} : \frac{22}{\sqrt{(15)}} + \sqrt{(141)} :: 4 : 1 + \frac{\sqrt{(2115)}}{22}$$

Supponendo il Co. Luigi $P = 4$, dovrà essere $F = 1 + \frac{\sqrt{(2115)}}{22} = 3 + \frac{1,99}{22} = 3 + \frac{1}{11}$ prossimamente. Questo valore di F si accorda fisicamente collo stabilito dal mentovato chi. Autore $= 3 + \frac{9}{100}$.

Problema

Determinare quell'arco di cerchio ec.

Problema

Determinare quell'arco di cerchio, il cui diametro sia verticale, la corda del quale sia passata da un punto grave in egual tempo che le due corde dei due semiarchi, supposto che nel passaggio dall'una all'altra di queste due corde il mobile ~~[illegible]~~ non perda punto di velocità.

Nel semicerchio DAG (fig. 1.), il cui diametro DG sia verticale, condotta dal centro C la normale COB alla corda AG, e congiunte le corde AB, GB, cerco l'arco ABG dotato della mentovata proprietà. Si menino le AQ, BP normali al diametro DG. Pongo il raggio $CG = a$, $QG = x$, onde ne risulti $AG = \sqrt{2ax}$, $GO = \sqrt{\frac{ax}{2}}$, e per conseguenza $CO = \sqrt{(a^2 - \frac{ax}{2})}$, ed $OB = GP = a - \sqrt{(a^2 - \frac{ax}{2})}$. Avremo inoltre $GB = \sqrt{(\overline{GO}^2 + \overline{OB}^2)} = \sqrt{(2a^2 - 2a\sqrt{a^2 - \frac{ax}{2}})}$, e $PQ = GQ - GP = x - a + \sqrt{(a^2 - \frac{ax}{2})}$.

Espressa la gravità per 1., e chiamata f la forza, che stimola il grave per la direzione AB, avremo l'analogia $1 : f :: AB = \sqrt{(2a^2 - 2a\sqrt{a^2 - \frac{ax}{2}})} : PQ = x - a + \sqrt{(a^2 - \frac{ax}{2})}$, che dà

$$f = \frac{x - a + \sqrt{(a^2 - \frac{ax}{2})}}{\sqrt{(2a^2 - 2a\sqrt{a^2 - \frac{ax}{2}})}}.$$

Sia t il tempo impiegato a discendere per la corda AB, e perché la velocità in B si eguaglia $\sqrt{2PQ} = \sqrt{(2x - 2a + 2\sqrt{a^2 - \frac{ax}{2}})}$; scopriremo

$$ft = \frac{(x - a + \sqrt{a^2 - \frac{ax}{2}}).t}{\sqrt{(2a^2 - 2a\sqrt{a^2 - \frac{ax}{2}})}} = \sqrt{(2x - 2a + 2\sqrt{a^2 - \frac{ax}{2}})}$$

e perciò

$$t = \frac{2\sqrt{(a^2 - a\sqrt{a^2 - \frac{ax}{2}})}}{\sqrt{(x - a + \sqrt{a^2 - \frac{ax}{2}})}}.$$

Nomino f' la forza accelerante il mobile per la corda AG, e dovendo stare $1 : f' ::$

AG

$BG = \sqrt{(2a^2 - 2a\sqrt{a^2 - \frac{ax}{2}})}$: $PG = a - \sqrt{(a^2 - \frac{ax}{2})}$, scopro $f' = \frac{a - \sqrt{a^2 - \frac{ax}{2}}}{\sqrt{(2a^2 - 2a\sqrt{a^2 - \frac{ax}{2}})}}$. Nello scendere per la corda BG si impieghi dal mobile il tempo t', e fatta la riflessione, che nel punto G è fornito dalla velocità $\sqrt{2QG} = \sqrt{2x}$, e che nel punto B avea la velocità $=$ $\sqrt{(2x - 2a + 2\sqrt{a^2 - \frac{ax}{2}})}$, ci accorgeremo, che $\sqrt{2x} - \sqrt{(2x - 2a + 2\sqrt{a^2 - \frac{ax}{2}})}$ è la velocità guadagnata dal corpo percorrendo la corda BG. Avremo pertanto $f't' = \frac{(a - \sqrt{(a^2 - \frac{ax}{2})}).t'}{\sqrt{(2a^2 - 2a\sqrt{a^2 - \frac{ax}{2}})}} =$ $\sqrt{2x} - \sqrt{(2x - 2a + 2\sqrt{a^2 - \frac{ax}{2}})}$ e conseguentemente $t' = \frac{2\sqrt{ax} - 2\sqrt{(ax - a^2 + a\sqrt{a^2 - \frac{ax}{2}})}}{\sqrt{(a - \sqrt{a^2 - \frac{ax}{2}})}}$.

Espresso il tempo della discesa per la corda AG colla lettera $T = 2\sqrt{a}$, passandosi essa corda nel tempo stesso che il diametro DG $= 2a$, e ricercando il Problema, che sia $t + t' = T$, scopriremo
$$\frac{2\sqrt{(a^2 - a\sqrt{a^2 - \frac{ax}{2}})}}{\sqrt{(x - a + \sqrt{a^2 - \frac{ax}{2}})}} + \frac{2\sqrt{ax} - 2\sqrt{(ax - a^2 + a\sqrt{a^2 - \frac{ax}{2}})}}{\sqrt{(a - \sqrt{a^2 - \frac{ax}{2}})}}$$
$= 2\sqrt{a}$, e riducendo allo stesso denominatore, ed effettuate le debite operazioni
$$\frac{2\sqrt{a}.(2a - x - 2\sqrt{a^2 - \frac{ax}{2}} + \sqrt{(x^2 - ax + x\sqrt{a^2 - \frac{ax}{2}})})}{\sqrt{(\frac{3}{2}ax - 2a^2 + (2a - x).\sqrt{a^2 - \frac{ax}{2}})}} = 2\sqrt{a}$$
e generalmente $t + t' : T ::$
$2\sqrt{a}.(2a - x - 2\sqrt{a^2 - \frac{ax}{2}} + \sqrt{(x^2 - ax + x\sqrt{a^2 - \frac{ax}{2}})}) : 2\sqrt{a}$

Quantunque il valore di $t + t'$ sia rigorosamente dimostrato, nulladimeno si può confermare nella seguente maniera. Pongasi $x = 2a$, ed essendo in tal circostanza $\sqrt{(a^2 - \frac{ax}{2})}$ $= 0$, troveremo $t + t' = 2\sqrt{2a}$. Nella fig. 2. adattata a questa ipotesi si tiri la orizzontale DF, la quale venga intersecata in F

dalla

dalla GA continuata. I due piani DA, 7A uguali, ed ugualmente inclinati all'orizzonte si scorrono nel tempo stesso t da un [corpo]. Avendo dunque il corpo la medesima velocità nel punto B, e supposto sempre che non si perda velocità passando dal piano DA al AG, quest'ultimo piano si scorrerà ne' due incontri in pari tempo t'. Sarà dunque uguale il tempo, in cui il grave viaggia pei due piani DA, AG, e per l'unico piano 7G. Ora la forza acceleratrice pel piano 7G è $= \frac{1}{\sqrt{2}}$, e la velocità in G è $= 2\sqrt{a}$. Avremo dunque $\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (t+t') = 2\sqrt{a}$, e perciò $t+t' = 2\sqrt{2a}$, e quindi in tal tempo si scorrono le corde DA, AG, ch'è quello appunto dalla nostra formola determinato.

Poichè quando $x = 2a$, il tempo per le due corde (Fig. 1.) AB, BG è maggiore del tempo $2\sqrt{a}$ per la corda AG, cerchiamo cosa succeda ponendo $x = \frac{3}{2}a$. In tal caso scopriremo $t+t' = 2\sqrt{a} \cdot (\sqrt{3} - \frac{1}{2}\sqrt{2}) =$ $2\sqrt{a} \cdot 1,02496$ maggiore del tempo $2\sqrt{a}$ per la corda AG.

Facciasi $x = a$, e ne proverrà $t+t' =$
$2\sqrt{a} \cdot \left(\frac{1-\sqrt{2}+\sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{2}}}{\sqrt{(\frac{1}{2}\sqrt{2}-\frac{1}{2})}}\right) = 2\sqrt{a} \cdot \frac{0,42667}{0,4551} =$
$2\sqrt{a} \cdot 0,93736$, ch'è minore di $2\sqrt{a}$ molto più di quello sia maggiore
$2\sqrt{a} \cdot 1,02496$.

Il valore di $x = \frac{5}{4}$ determinerà il tempo $t+t'$ calante sì, ma più prossimo al giusto, trovandosi in tal ipotesi $t+t' =$
$2\sqrt{a}\left(\frac{\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\sqrt{61}+\frac{1}{4}\sqrt{(5+5\sqrt{61})}}{\frac{1}{4}\sqrt{(3\sqrt{61}-2)}}\right) = 2\sqrt{a} \cdot \frac{0,5635}{0,5746}$
$= 2\sqrt{a} \cdot 0,97491$, che a un di presso tanto

cala

cala da $2\sqrt{a}$; quanto questa grandezza è superata da $2\sqrt{a}\cdot 1,02496$. relativa ad $x = \frac{3}{2}a$

Si inferisca, che $x = \frac{6+5}{4+4}a = \frac{11}{8}a$ ci darà più prossimo all'esatto quell'arco, la cui corda si dee scorrere nel tempo stesso che le due corde delle due metà. Sarà pertanto sostituendo nella formula generale in cambio di x il suo valore $\frac{11}{8}a$, $t+t' =$

$$2\sqrt{a}\cdot\frac{\left(\frac{5}{4} - \frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{8}\sqrt{(33+22\sqrt{5})}\right)}{\frac{1}{4}\sqrt{(1+\frac{5}{2}\sqrt{5})}} =$$

$2\sqrt{a}\cdot\frac{0,640225}{0,641775} = 2\sqrt{a}\cdot 0,99756$, che ancora decresca da $2\sqrt{a}$.

Prendendo fra $\frac{3a}{2}$, $\frac{11a}{8}$ una ragione media $\frac{3+11a}{2+8} = \frac{7}{5}a$, si troverà $t+t' = 2\sqrt{a}\cdot\frac{0,65639}{0,65470}$ $= 2\sqrt{a}\cdot 1,00256$. I due ultimi valori di $t+t'$ tolgono in mezzo $2\sqrt{a}$, da cui differiscono, quello per -244, questo per $+256$.

Si stabilisca dunque $x = \left(\frac{7+11}{5+8}\right)a = \frac{18}{13}a$ e si scoprirà $t+t' = 2\sqrt{a}\cdot\frac{0,64642}{0,64673} =$ $2\sqrt{a}\cdot 0,99952$, che tuttavia cala, benchè pochissimo, da $2\sqrt{a}$.

Per far svanire questa piccolissima differenza, si osservi che le frazioni $\frac{7}{5} = \frac{91}{65}$, $\frac{18}{13} = \frac{90}{65}$ divariano per $\frac{1}{65} = 0,0153846153846$ e che i coefficienti di $2\sqrt{a}$ $1,00256$, $0,99952$ relativi ai valori di x $\frac{7}{5}a$, $\frac{18}{13}a$ differiscono dall'unità per $+0,00256$, $-0,00048$ come ho poco fa notato. Facciasi:

$256 + 48 = 304 : 48 :: 0,0153846153846$: ~~[illegible]~~ $0,0024132730$, ed il quarto termine sarà la quantità, che si dee aggiungere

a

$a \cdot \frac{18}{13} = 1,3846153846$, onde si formi la somma $= 1,3870286576$. A cagione di accorciare il calcolo ponga $x = a \cdot 1,387$, valore che sostituito nella formola generale, determinerà dopo molte operazioni $t+t' = 2\sqrt{a} \cdot \frac{0,64796}{0,64797} = 2\sqrt{a} \cdot 0,999985$, che fisicamente si adegua con $T = 2\sqrt{a}$, calando $0,999985$ dalla unità per $\frac{1}{66666.\frac{2}{3}}$

Per la qual cosa $GQ = x = a \cdot 1,3870286576$ determina con adeguata esattezza l'arco cercato GBA. Per iscoprirne la misura in gradi, minuti, e secondi, conduco i due raggi CA, CQ, il secondo dei quali sia normale al diametro GD; ed osservo che $CQ = x - a = a \cdot 1,3870286576 - a = a \cdot 0,3870286576$ è il seno dell'arco QA. Ricorrendo alle Tavole, che suppongono $a = 1$, trovo l'arco $QA = 22°, 46', 11''$. Si aggiunga il quadrante GBQ, e ne proverrà l'arco cercato $GBA = 112°, 46', 11''$.

Ho notato, che quando x ha il massimo valore $= 2a$, ne risulta $t+t' : T :: \sqrt{2} : 1$. Vediamo cosa succeda posta x minima. Presa per mano la formola generale $t+t' = \frac{2\sqrt{(a^2 - a\sqrt{a^2 - \frac{ax}{2}})} + \ldots}{\sqrt{(x - a + \sqrt{a^2 - \frac{ax}{2}})}}$ [illegible] $\frac{2\sqrt{ax} - 2\sqrt{(ax - a^2 + a\sqrt{a^2 - \frac{ax}{2}})}}{\sqrt{(a - \sqrt{a^2 - \frac{ax}{2}})}}$ avvertito, che $\sqrt{a^2 - \frac{ax}{2}} = a - \frac{x}{4}$. Fatta la sostituzione di questo valore, ed espurgata la formola, ci si presenterà $t+t' : T = \frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{3}} + 4\sqrt{a} - 2\sqrt{3a} =$ [illegible] $(4 - \frac{4\sqrt{3}}{3}) \cdot \sqrt{a} = 1,6906 \cdot \sqrt{a}$

Ha

Ha dimostrato l'Ab. Vincenzo mio Fratello nell'Opuscolo *De praecipuis pendulorum circularium, et cycloidalium proprietatibus*, che il tempo per una corda minima sta a quello per l'arco come il diametro ad un quadrante di circolo, ossia prossimamente come $2 : \frac{355}{226} =$ $1,5707965$ ~~$0,7853982$~~. Si inferisca dunque, che il tempo per le corde di due semiarchi minimi è ~~minore~~ maggiore del tempo per l'arco minimo intero. ~~Questa conseguenza non ha sorpreso per dir il vero, ma fa d'uopo acquietarsi all'evidenza della dimostrazioni.~~

Per la soluzione del proposto Problema mi sono servito del metodo di rinserrare dentro sempre più angusti confini il giusto valore di x, che determina l'arco cercato. Mi sono così adoperato; perché volendo liberare la formola

$$2a - x - a\sqrt{\left(a^2 - \frac{ax}{2}\right)} + \sqrt{\left(x^2 - ax + x\sqrt{a^2 - \frac{ax}{2}}\right)} = \sqrt{\left(\frac{3}{2}ax - 2a^2 + (2a - x)\cdot\sqrt{a^2 - \frac{ax}{2}}\right)}$$

dai radicali, si presenta un'equazione molto composta. Ecco il calcolo. Avremo pertanto

$$2a - x - 2\sqrt{\left(a^2 - \frac{ax}{2}\right)} = \sqrt{\left(\frac{3}{2}ax - 2a^2 + (2a - x)\cdot\sqrt{a^2 - \frac{ax}{2}}\right)} - \sqrt{\left(x^2 - ax + x\sqrt{a^2 - \frac{ax}{2}}\right)};$$

ed alzando al quadrato, ed espurgando la formola, sarà

$$-10a^2 + \frac{13}{2}ax + (10a - 4x)\sqrt{a^2 - \frac{ax}{2}} = 2\sqrt{\left(4a^3x - \frac{11}{2}a^2x^2 + 2ax^3 - \left(4a^2x - \frac{9}{2}ax^2 + x^3\right)\sqrt{a^2 - \frac{ax}{2}}\right)}.$$

Alzo nuovamente al quadrato, ed espurgando come sopra, trovo $200a^4 - 276a^3x + \frac{441}{4}a^2x^2 - 16a^3x = (200a^3 - 226a^2x + 70ax^2 - 4x^3)\sqrt{\left(a^2 - \frac{ax}{2}\right)}$, ed elevando per la terza volta al quadrato,

$(200a^4$

$(200a^4 - 2280a^3x + \frac{4491}{4}a^2x^2 - 160ax^3)^2 =$
$(200a^3 - 2280a^2x + 70ax^2 - 4ax^3)^2 \cdot (a^2 - \frac{ax}{2})$,
equazione, che ascende alla settima potestà.

Il Ch. P. D. Gregorio Fontana mi ha comunicata una soluzione di questo Problema, nella quale, fatta $GO = z$, stabilisce il tempo della discesa per la corda AG a quello per le due corde AB, BG come

$1 : \frac{2 - 4z^2 + 2z\sqrt{(4z^2-1)}}{\sqrt{(4z^2-1)}}$. Questa proporzione non si accorda colla vera. Ho dimostrato, che quando $GA = GD$, la detta ragione esser dee come $1 : \sqrt{2}$. Vediamo cosa succede ponendo $GO = z = GC = 1$. Troveremo in tal ipotesi $1 : 2 - 4z^2 + 2z\sqrt{(4z^2-1)} :: 1 : \frac{-2+2\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$, il che molto si allontana dal giusto.
Ne seguirebbe inoltre l'assurdo, che scorrendosi qualunque corda AG nel tempo stesso che il diametro DG; il tempo per le due corde AB, BG sarebbe immaginario, quando la corda $AG = 2z$ fosse minima.

Aggiungo una seconda soluzione del Problema, ritenendo la preparazione, e le determinazioni del P. Fontana. Si continui la corda GB finchè tagli in T l'orizzontale QA prolungata. Ponendo egli $CG = a = 1$, $GO = \sqrt{\frac{ax}{2}} = z$, ne segue essere $x = 2z^2$.
Si facciano queste sostituzioni nei valori delle linee da me determinati nella prima soluzione, e si troverà $GP = 1 - \sqrt{(1-z^2)}$, $GQ = 2z^2$, $GB = AB = \sqrt{(2 - 2\sqrt{1-z^2})}$, $GO = z$, $GA = 2z$.
Per i triangoli simili PGB, QGT abbiamo
$GP = 1 - \sqrt{(1-z^2)} : GQ = 2z^2 :: GB = \sqrt{(2 - 2\sqrt{1-z^2})}$
$: GT$

$: G7 = \frac{2z^2\sqrt{2}}{\sqrt{(1-\sqrt{1-z^2})}}$. Per conseguenza sarà

$B7 = G7 - GB = \frac{\sqrt{2}\cdot 2z^2}{\sqrt{(1-\sqrt{1-z^2})}} - \sqrt{(2-2\sqrt{1-z^2})} =$

$\frac{\sqrt{2}(2z^2-1+\sqrt{1-z^2})}{\sqrt{(1-\sqrt{1-z^2})}}$.

Avendo il corpo in G la stessa velocità o discenda per AG, o per 7G, i tempi della discesa staranno in ragione degli spazj AG, 7G. Dovrà essere dunque

$AG = 2z : 7G = \frac{\sqrt{2}\cdot 2z^2}{\sqrt{(1-\sqrt{1-z^2})}} :: T = a : \frac{\sqrt{2}\cdot 2z}{\sqrt{(1-\sqrt{1-z^2})}}$,

ed il quarto termine esprimerà il tempo della discesa per 7G. Fatta la riflessione, che i tempi per 7G, 7B devono riferirsi come $\sqrt{7G} = \frac{\sqrt{(2z^2\cdot\sqrt{2})}}{\sqrt[4]{(1-\sqrt{1-z^2})}} : \sqrt{7B} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}\cdot 2z^2-1+\sqrt{1-z^2}}{\sqrt[4]{(1-\sqrt{1-z^2})}}\right)}$, scopriremo l'analogia

$\sqrt{2z^2} : \sqrt{(2z^2-1+\sqrt{1-z^2})} :: \frac{\sqrt{2}\cdot 2z}{\sqrt{(1-\sqrt{1-z^2})}} : \frac{2\sqrt{(2z^2-1+\sqrt{1-z^2})}}{\sqrt{(1-\sqrt{1-z^2})}}$,

il cui quarto termine esprime il tempo della discesa per 7B. Sottraendo questo dal tempo per 7G, ne risulterà il tempo per BG, cioè

$t' = \frac{\sqrt{2}\cdot 2z - 2\sqrt{(2z^2-1+\sqrt{1-z^2})}}{\sqrt{(1-\sqrt{1-z^2})}}$.

Inoltre perchè il grave in B è fornito della medesima velocità o discenda per 7B, o per AB, i tempi riceveranno la ragione dei detti spazj, onde si abbia $7B = \frac{\sqrt{2}\cdot(2z^2-1+\sqrt{1-z^2})}{\sqrt{(1+\sqrt{1-z^2})}} :$

$AB = \sqrt{(2-2\sqrt{1-z^2})} :: \frac{2\sqrt{(2z^2-1+\sqrt{1-z^2})}}{\sqrt{(1-\sqrt{1-z^2})}} : t =$

$\frac{2\sqrt{(1-\sqrt{1-z^2})}}{\sqrt{(2z^2-1+\sqrt{1-z^2})}}$, e quindi $t+t' = \frac{2\sqrt{(1-\sqrt{1-z^2})}}{\sqrt{(2z^2-1+\sqrt{1-z^2})}}$

$+ \frac{2\sqrt{2z^2} - 2\sqrt{(2z^2-1+\sqrt{1-z^2})}}{\sqrt{(1-\sqrt{1-z^2})}}$, il che perfettamente

si accorda colla prima soluzione.

BI
N

BI
N

Problema

Determinare il tempo, in cui essendo verticale etc.

Problema.

Determinare il tempo, in cui essendo verticale (fig. 1.) il diametro AB del circolo, si scorre l'arco ODB, che supera il quadrante per l'arco OD, e primieramente il tempo nel quale si passa l'arco OD, il cui seno QC = b, ed il raggio del circolo = a.

Si trovi il corpo nel punto E, e tirata l'ordinata Ea = y, e la retta QOR parallela a CD, si continui Ea in S, onde si abbia SE = b − y. Dunque la corrispondente assissa Ca = x, e chiamata f la forza tangenziale acceleratrice nel punto E, abbiamo $f = \frac{EK}{CE} = \frac{x}{a}$. Il grave nel punto E ha fatto acquisto della velocità, che nomino $u = \sqrt{(2SE)} = \sqrt{(2b-2y)}$. Nella nota formola $dt = \frac{du}{f}$ sostituito il valore di $f = \frac{x}{a}$, e di $du = \frac{-dy}{\sqrt{(2b-2y)}}$, mi si presenta $dt = \frac{a}{x} \cdot \frac{-dy}{\sqrt{(2b-2y)}}$.

Condotta (fig. 2.) la verticale CQ' = 2b, e l'orizzontale $Q'v = \sqrt{2b}$, col parametro = 1, descrivo la parabola conica Q'PV, nella quale posta Q'K' = 2b − 2y, sarà $K'P = Q'p = \sqrt{(2b-2y)}$. Supposto che Q'K' = 2b − 2y sia doppia di QK = b − y della fig. 1., il valore corrispondente di x sarà Ca. Perciò $\frac{a}{x} = z$, e però $a = x.z$, e poscia (fig. 3.) delineo l'orizzontale CD = a, e la verticale indefinita Cn, a cui sia parallela Dz = 1. Col rettangolo costante CD.Dz = a.1 disegnata l'iperbola zapn fra gli assintoti CD, Cn, a Ca = x corrisponderà $ap = z = \frac{a}{x}$: ma a Ca = x (fig. 1.) si riferisce CK = y, e (fig. 2.) $Q'p = \sqrt{(2b-2y)}$; dunque a $Q'p = \sqrt{(2b-2y)}$ dee riferirsi (fig. 3) $ap = z = \frac{a}{x}$. Dal punto p (fig. 2.) si conduca la verticale $p\pi = \frac{a}{x} = ap$ della fig. 3., ed

il

il punto rp; ed altri similmente determinati apparterranno alla curva (fig. 2.) rcrpru la cui quadratura l'irrcl si eguaglia al tempo e spazio dal grave a discendere per l'arco (fig. 1.) OED. Si avverta essere (fig. 2.) $l'rc = \frac{a}{\sqrt{(a^2-b^2)}}$, $uru = 1$.

Per ottenere con fisica adequazione la suddetta quadratura, mi servo del seguente metodo. Divido (fig. 2.) $l'u = \sqrt{2b}$ in otto parti. Sia primieramente $\sqrt{(2b-2y)} = \frac{\sqrt{2b}}{8}$, e per conseguenza $b-y = \frac{b}{64}$, $y = \frac{63}{64}.b$, $y^2 = \left(\frac{63}{64}\right)^2.b^2$. Ma $\sqrt{(a^2-y^2)} = x$; dunque $\sqrt{\left(a^2-\left(\frac{63}{64}\right)^2 b^2\right)} = x$, ed $\frac{a}{x} = \frac{a}{\sqrt{\left(a^2-\left(\frac{63}{64}\right)^2 b^2\right)}}$. Sia in secondo luogo $\sqrt{(2b-2y)} = \frac{\sqrt{2b}}{4}$, e $b-y = \frac{b}{16}$, $y = \frac{15b}{16}$, $y^2 = \left(\frac{15}{16}\right)^2 b^2$, $\sqrt{\left(a^2-\left(\frac{15}{16}\right)^2 b^2\right)} = x$; $\frac{a}{x} = \frac{a}{\sqrt{\left(a^2-\left(\frac{15}{16}\right)^2 b^2\right)}}$. Seguitando in tal guisa si forma la sottoscritta

Tavola

$\sqrt{(2b-2y)} = 0$	$\frac{a}{x} = \frac{a}{\sqrt{(a^2-b^2)}}$
$\sqrt{(2b-2y)} = \frac{\sqrt{2b}}{8}$	$\frac{a}{x} = \frac{a}{\sqrt{\left(a^2-\left(\frac{63}{64}\right)^2 b^2\right)}}$
$\sqrt{(2b-2y)} = \frac{\sqrt{2b}}{4}$	$\frac{a}{x} = \frac{a}{\sqrt{\left(a^2-\left(\frac{15}{16}\right)^2 b^2\right)}}$
$\sqrt{(2b-2y)} = \frac{3}{8}\sqrt{2b}$	$\frac{a}{x} = \frac{a}{\sqrt{\left(a^2-\left(\frac{55}{64}\right)^2 b^2\right)}}$
$\sqrt{(2b-2y)} = \frac{\sqrt{2b}}{2}$	$\frac{a}{x} = \frac{a}{\sqrt{\left(a^2-\frac{9}{16} b^2\right)}}$
$\sqrt{(2b-2y)} = \frac{5}{8}\sqrt{2b}$	$\frac{a}{x} = \frac{a}{\sqrt{\left(a^2-\left(\frac{39}{64}\right)^2 b^2\right)}}$
$\sqrt{(2b-2y)} = \frac{3}{4}\sqrt{2b}$	$\frac{a}{x} = \frac{a}{\sqrt{\left(a^2-\left(\frac{7}{16}\right)^2 b^2\right)}}$
$\sqrt{(2b-2y)} = \frac{7}{8}\sqrt{2b}$	$\frac{a}{x} = \frac{a}{\sqrt{\left(a^2-\left(\frac{15}{64}\right)^2 b^2\right)}}$
$\sqrt{(2b-2y)} = \sqrt{2b}$	$\frac{a}{x} = 1$

Le porzioni della curva rcrpru intercette fra due ordinate prossime, per esempio $\frac{a}{\sqrt{(a^2-b^2)}}$, $\frac{a}{\sqrt{\left(a^2-\left(\frac{63}{64}\right)^2 b^2\right)}}$, si possono fisicamente prendere per linee rette, e quindi l'aja fra loro compresa sarà

=

$= \left(\frac{a}{2\sqrt{(a^2-b^2)}} + \frac{a}{2\sqrt{(a^2-(\frac{63}{64})^2 b^2)}}\right) \cdot \frac{\sqrt{2b}}{4}$; e l'aggregato di questi aje, che ascendono al numero di otto, si eguagliava al tempo t, in cui si passa l'arco OED (fig. 1.).

Mi propongo di trovare il tempo t impiegato dal grave a scorrere l'arco OED = 22°, 46', 11'', il cui seno CQ = b = a. 0,3870286576. Ho scelto quest'arco, perchè con un metodo di approssimazione avea trovato, che la corda di esso arco più il quadrante, e le corde delle due metà si scorrono da un grave nel tempo stesso. Ho poi scoperto con più esattezza, che l'arco fornito di tal proprietà è di 112°, 46', 27''. Fatti i necessarj prolissi computi, mi si presentano le seguenti due Tavole

I.

$\sqrt{(2b-2y)} = \sqrt{a}\,.\,0,00000005,\ \frac{a}{x} = 1,0845190812$
$\sqrt{(2b-2y)} = \sqrt{a}\,.\,0,10997565,\ \frac{a}{x} = 1,0815649815$
$\sqrt{(2b-2y)} = \sqrt{a}\,.\,0,21995130,\ \frac{a}{x} = 1,0731321300$
$\sqrt{(2b-2y)} = \sqrt{a}\,.\,0,32992695,\ \frac{a}{x} = 1,0603700261$
$\sqrt{(2b-2y)} = \sqrt{a}\,.\,0,43990260,\ \frac{a}{x} = 1,0449928627$
$\sqrt{(2b-2y)} = \sqrt{a}\,.\,0,54987825,\ \frac{a}{x} = 1,0290283372$
$\sqrt{(2b-2y)} = \sqrt{a}\,.\,0,65985390,\ \frac{a}{x} = 1,0146513043$
$\sqrt{(2b-2y)} = \sqrt{a}\,.\,0,76982955,\ \frac{a}{x} = 1,0041397067$
$\sqrt{(2b-2y)} = \sqrt{a}\,.\,0,879805203,\ \frac{a}{x} = 1,0000000000$

II.

$$\left.\begin{array}{l}
\frac{1,0845190812}{2} + \frac{1,0815649815}{2} \\
\frac{1,0815649815}{2} + \frac{1,0731321300}{2} \\
\frac{1,0731321300}{2} + \frac{1,0603700261}{2} \\
\frac{1,0603700261}{2} + \frac{1,0449928627}{2} \\
\frac{1,0449928627}{2} + \frac{1,0290283372}{2} \\
\frac{1,0290283372}{2} + \frac{1,0146513043}{2} \\
\frac{1,0146513043}{2} + \frac{1,0041397067}{2} \\
\frac{1,0041397067}{2} + \frac{1,0000000000}{2}
\end{array}\right\} \cdot 0,10997565 \cdot \sqrt{a}$$

La somma dei prodotti indicati dalla seconda Tavola si agguaglia all'aggregato della metà della prima, e della nona ordinata $\frac{a}{x}$, ed a quelle delle sette medie il tutto moltiplicato per $\frac{\sqrt{2b}}{8} = \sqrt{a}\cdot 0,10997568$, qualmente si vede espresso nella Tavola III.

III

0,5422595406
1,0815689815
1,0231321300
1,0603700261
1,0449928627
1,0290283372
1,0146513043
1,0041397067
0,5000000000

8,3501428891 · 0,10997555 · $\sqrt{a}$ =
0,9183563821 · $\sqrt{a}$

La somma dunque resta scoperta moltiplicata per $\sqrt{a}\cdot 0,10997565$ si agguaglia prossimamente al tempo t, in cui dal grave si scorre l'arco OED = 22°, 40', 11'', onde si abbia t = $\sqrt{a}\cdot 0,9183563821\cdot\sqrt{a}$

Passo a determinare il tempo t', nel quale il corpo fornito (fig. 9.) nel punto D della velocità $\sqrt{aQC} = \sqrt{ab}$ discende pel quadrante circolare DFA descritto col raggio CD = a. Si trovi esso corpo nel punto F, e tirata la verticale $Ff = y$, la corrispondente $Cf = x$. La totale velocità in F sarà = $\sqrt{(ab+ay)}$: ma nel punto D avea la velocità $\sqrt{ab}$; dunque la velocità acquistata scendendo da D in F si scoprirà = $\sqrt{(ab+ay)} - \sqrt{ab}$. Essendo la forza tangenziale acceleratrice in F uguale ad $\frac{x}{a}$, ci si presenterà la formola $\int \frac{x}{a}\cdot dt' = \sqrt{(ab+ay)} - \sqrt{ab}$,

a

e quindi differenziando $\frac{x}{a}.dt' = \frac{dy}{\sqrt{(2b+2y)}}$; e per conseguenza $dt' = \frac{a}{x}.\frac{dy}{\sqrt{(2b+2y)}}$.

Alli asse perpendicolare Q'B' (fig. 5.) col parametro uguale alli unità descrivo la parabola conica Q V K Z, e segnate le assisse Q'C = 2b, Q'L = 2b+2y, Q'B' = 2b+2a, tiro le ordinate C'V = √2b, L'K = √(2b+2y), B'Z = √(2b+2a), e poscia le verticali Vν, Kk, Zz continuate sino alla tangente Q'z, che determinano le linee Q'ν, Q'k, Q'z uguali alle velocità √(2b), √(2b+2y), √(2b+2a) acquistate dal mobile nello scorrere gli archi circolari (fig. 4.) OD, ODF, ODFA. Ne segue (fig. 5.), che νk = √(2b+2y) − √(2b), νz = √(2b+2a) − √(2b) esprimeranno le velocità guadagnate discendendo per gli archi (fig. 4.) DF, DFA.

Sia (fig. 6.) l'orizzontale CD = a, e delineata la verticale Cω indefinita, Dz = 1. col rettangolo costante CD.Dz = a.1 disegno l'iperbola zz'k'x'ν fra gli assintoti CD, Cω, e tagliata Cf = x uguale alla Cf della fig. 4., sarà fk = $\frac{a}{x}$. A cotal linea faccio eguale la kx' della fig. 5., e pel punto x', e per altri infiniti similmente determinati delineo la curva νx'k'zz, la cui quadratura νzzz'k'xν si eguaglia al tempo speso dal grave a discendere pel quadrante circolare (fig. 4.) DFA.

Essendo Zzz (fig. 5.) l'assintoto dell curva zz'k'x'ν, e per conseguenza l'ordinata zz infinita, fa di mestieri il provare; che l'aja νzzz'k'xν è finita. Per ottener ciò taglio Q'y = √(2b+2y) assai prossima a Q'z = √(2b+2a), ma per altro distante per la grandezza yz piccola sì ma finita, onde ad essa corrisponda l'ordinata finita yny, e dimostro esser finita l'aja y z z z n y, e ne stabilisco il valore, dimodochè aggiungendo ad essa l'aja certamente

finita

finita $vyzykzv$; ne risulti parimente finita l'aja totale $vzzzzykzv$.

Faccio $y = a-g$, ed ho $\beta' y = \sqrt{(2b+2y)} = \sqrt{(2b+2a-2g)} = \sqrt{(2b+2a)} - \frac{g}{\sqrt{(2b+2a)}}$, supponendosi g fisicamente minima. Quindi addiviene che sia $yz = \beta' z - \beta' y = \sqrt{(2b+2a)} - \sqrt{(2b+2y)} = \frac{g}{\sqrt{(2b+2a)}}$. Pongo dopo ciò $y = a-q$ colla condizione, che q sia quantità fluente, la quale cominci dal nulla, e cresca sino a divenire $= g$. Differenziando trovo $dy = -dq$, e $\frac{dy}{\sqrt{(2b+2y)}} = \frac{-dq}{\sqrt{(2b+2a-2q)}}$.

Nella formola $\sqrt{(a^2-y^2)} = x$ sustituisco invece di y^2 il suo valore $a^2-2aq+q^2$, e scrivo $\sqrt{(2aq-q^2)} = x$, ed $\frac{a}{x} = \frac{a}{\sqrt{(2aq-q^2)}}$. Per la qual cosa avremo $\frac{a}{x} \cdot \frac{dy}{\sqrt{(2b+2y)}} = \frac{-adq}{\sqrt{(4baq+4a^2q-2bq^2-6aq^2+2q^3)}}$.

Supponendosi q fisicamente minima, rispettivamente ad essa si potranno trascurare q^2, e q^3. Avremo dunque $\int \frac{a}{x} \cdot \frac{dy}{\sqrt{(2b+2y)}} = \int \frac{-adq}{2\sqrt{(ba+a^2 \cdot q)}} = \frac{a\sqrt{g}}{\sqrt{(ab+a^2)}} - \frac{a\sqrt{q}}{\sqrt{(ab+a^2)}}$, e quando $q = 0$, ci si presenterà l'aja $yzzzzy = \frac{\sqrt{(ag)}}{\sqrt{(b+a)}}$.

Torno a prender per mano l'esempio dell'arco (fig. 4.) ODFB $= 112°; 40', 11''$, che determina $QC = b = a \cdot 0,3870286576$, $\sqrt{2b} = \sqrt{a} \cdot 0,87980$, $\sqrt{(2b+2a)} = \sqrt{a} \cdot 1,66555$, e finalmente (fig. 5.) $vz = \sqrt{(2b+2a)} - \sqrt{2b} = \sqrt{a} \cdot 0,78575$. Pongo $yz = \frac{vz}{100} = \sqrt{a} \cdot \frac{0,78575}{100} = \sqrt{a} \cdot 0,0078575$. Ora come di sopra ho trovato $yz = \frac{g}{\sqrt{(2b+2a)}} = \frac{g}{\sqrt{a} \cdot 1,66555}$; dunque $g = a \cdot 0,0078575 \cdot 1,66555 = a \cdot 0,013087039725$. E perchè $yzzzzy = \frac{\sqrt{(ag)}}{\sqrt{(b+a)}} = \frac{\sqrt{(2ag)}}{\sqrt{(2b+2a)}}$, scopriremo $yzzzzy = \frac{a\sqrt{(0,02617411425)}}{\sqrt{a} \cdot 1,66555} =$

$\sqrt{a}$.

$\sqrt{a}\cdot\frac{0,161744}{1,66555}$, ed effettuando l'indicata divisione, y2z2y = $\sqrt{a}\cdot 0,0971354808$, valore del tempo impiegato dal corpo a scorrere l'arco FA (fig. 4.), il cui coseno CL = y = a−g, ed il seno LF = x = $\sqrt{(2ag-g^2)}$.

Trovata la misura dell'aja yz22y (fig. 5.), m'inoltro a cavare quella dell'aja vyzy2kzv. Essendosi la linea vz divisa in cento parti; ed assegnatane una ad yz, ne contiene vy novantanove. Con un metodo analogo all'usato di sopra rispettivamente alla linea Qv divido vy in nove porzioni ciascuna eguale a $(\sqrt{(2ab+2a)} - \sqrt{2ab})\cdot\frac{11}{100} = \sqrt{a}\cdot 0,0464325$, ed indago i valori delle coordinate k2k = $\frac{a}{x}$, che separano una porzione dall'altra. Se quei segmenti di curva, che sono collocati fra due ordinate prossime, si possano fisicamente considerare come linee rette, l'aja vyzy2kzv verrà formata da nove trapezj, l'aja di ognun dei quali si determina agevolmente. Il trapezio per esempio vk2kzv si eguaglia a $\left(\frac{vzv+k2k}{2}\right)\cdot vk$. Ciò premesso, sia vk = $\sqrt{(2b+2y)} - \sqrt{2b} = \sqrt{a}\cdot 0,0464325$, e ponendo in cambio di $\sqrt{2b}$ il suo valore $\sqrt{a}\cdot 0,87980$, scopriremo $\sqrt{(2b+2y)}$ = $\sqrt{a}\cdot 0,9662325$, ed alzando al quadrato, 2b+2y = $a\cdot 0,9376052440$. Sottr. 2b = $a\cdot 0,7740573152$, e fatta la divisione per 2, trovo y = $a\cdot 0,0797739644$, ed $y^2 = a^2\cdot 0,00636344539609246736$. Quindi $a^2 - y^2 = x^2$ = $a^2\cdot 0,99363611460790753264$, x = $a\cdot 0,9968129787$, e finalmente $\frac{a}{x}$ = 1,003197290. Con tal serie di operazioni si determineranno tutte le ordinate $\frac{a}{x}$, e si formeranno la sottoposta due Tavole.

I.

$\sqrt{(ab+ny)}-\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot 0{,}000000000$ $\frac{a}{x}=1{,}0000000000$

$\sqrt{(ab+ny)}-\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot 0{,}04682325$ $\frac{a}{x}=1{,}0031972900$

$\sqrt{(ab+ny)}-\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot 0{,}17246850$ $\frac{a}{x}=1{,}0142471546$

$\sqrt{(ab+ny)}-\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot 0{,}25929775$ $\frac{a}{x}=1{,}0361216512$

$\sqrt{(ab+ny)}-\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot 0{,}34577300$ $\frac{a}{x}=1{,}0640977697$

$\sqrt{(ab+ny)}-\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot 0{,}43216825$ $\frac{a}{x}=1{,}1354047330$

$\sqrt{(ab+ny)}-\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot 0{,}51459350$ $\frac{a}{x}=1{,}2393031010$

$\sqrt{(ab+ny)}-\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot 0{,}60502375$ $\frac{a}{x}=1{,}4310464155$

$\sqrt{(ab+ny)}-\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot 0{,}69146000$ $\frac{a}{x}=1{,}6634005915$

$\sqrt{(ab+ny)}-\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot 0{,}77786925$ $\frac{a}{x}=6{,}2046154107$

II.

$\frac{1{,}0000000000}{2}+\frac{1{,}0031972900}{2}$

$\frac{1{,}0031972900}{2}+\frac{1{,}0142471544}{2}$

$\frac{1{,}0142471544}{2}+\frac{1{,}0361216512}{2}$

$\frac{1{,}0361216512}{2}+\frac{1{,}0640977697}{2}$

$\frac{1{,}0640977697}{2}+\frac{1{,}1354047330}{2}$ $\cdot 0{,}04682325\cdot\sqrt{a}$

$\frac{1{,}1354047330}{2}+\frac{1{,}2393031010}{2}$

$\frac{1{,}2393031010}{2}+\frac{1{,}4310464155}{2}$

$\frac{1{,}4310464155}{2}+\frac{1{,}6634005915}{2}$

$\frac{1{,}6634005915}{2}+\frac{6{,}2046154107}{2}$

L'aggregato dei prodotti indicati dalla seconda Tavola s'eguaglia alla somma della metà della prima, e della decima ordinata $\frac{a}{x}$, ed alla somma delle otto ordinate medie il tutto moltiplicato per $\frac{11}{100}(\sqrt{(ab+na)}-\sqrt{ab})=\sqrt{a}\cdot 0{,}04682325$; qualmente dinota la Tavola III.

III.

0,5000000000

1,0031972900

1,0142471544

1,0361216512

1,0840972697

1,1354047330

1,2298031010

1,4310464155

1,6634005915

3,1043077053

13,4151261124 · 0,0464325 · √a =

1,1595029442 · √a

Sarebbe questo il valore dell'aja vyryrkrv, quando i segmenti della curva rvrkry compresi fra due ordinate prossime potessero fisicamente considerarsi come linee rette. Descrivo nella Fig. 3 in forma grande le parti settima km, ottava mo, nona oy della retta vy, perchè le linee si possano dall'occhio discernere. Ognuna di esse parti si agguaglia a $\frac{1}{9}$ vy = √a · 0,0464325, e se la curva rory esistente fra le due ordinate oro, yry potesse supporsi retta, sarebbe l'aja oyryro = $\frac{oro + yry}{2}$ · oy = 4,0460045011 · 0,0464325 · √a = 0,3497068866 · √a. Ora questa supposizione si allontana troppo dal vero, essendo l'ordinata, che taglia in due parti uguali l'asse oy, cioè a dire qrq = 2,4617223644 molto minore di 4,0460045011 media aritmetica fra oro, yry. Se non solo rorq, ma ancora rqry fisicamente coincida colla curva, scopriremo l'aja oyryrqro =

$\left(\frac{oro + yry}{2} + qrq\right) \cdot oq = (4{,}0460080011$
$+ 2{,}4617723684) \cdot 0{,}04321625 \cdot Va$
$= 0{,}2812418634 \cdot Va$. Cala questa dall'aja oyryro per la non trascurabile quantità $0{,}0684647232 \cdot Va$.

La curva frattanto $rqrvry$ non può confondersi colla linea retta $rqry$. Per dimostrare questa verità, divido la linea qy in due parti eguali qv, vy, onde ne risulti $qv = vy = 0{,}021608125 \cdot Va$, ed $vr = 0{,}7562843775\,Va = \sqrt{(ab+ry)} - \sqrt{ab}$, e coll'usato metodo determino l'ordinata $vrv = \frac{a}{x} = 3{,}246753353$. Ora essendo
$qrq = 2{,}4617723684$
$yry = 6{,}2086154107$, e la loro somma
$= 8{,}6703877791$, la metà di questa somma si agguaglia a $4{,}3351938895$; e supera vrv per $1{,}0884405385$, quantità, che moltiplicata per $qv = 0{,}021608125 \cdot Va$ dà il prodotto
$1{,}0884405385 \cdot 0{,}021608125 \cdot Va$
$= 0{,}0235191592 \cdot Va$, per cui, come agevolmente dimostrasi, l'aja $qyryrvrq$ decresce dall'aja $qyryrq$. Ho sopra provato l'aja rettilinea $vyryroamikav =$
$1{,}1595029482 \cdot Va$, da cui l'aja parimente rettilinea $vyryrvrqroamakrv$ cala per
$0{,}0684647232 \cdot Va + 0{,}0235191592\,Va$
$= 0{,}0919838824 \cdot Va$, e quindi si determina $vyryrvrqroamikav =$
$1{,}0675190658 \cdot Va$

È ancora troppo lunga la retta $rvry$, onde possa supporsi, che fisicamente confondasi colla curva $rvrsry$. Cerco adunque il valore di una nuova ordinata srs, che divida per metà il segmento vy, dimodochè si abbia $vs = sy = 0{,}010804062 \cdot Va$, ed $vs = 0{,}7670884337 \cdot Va = \sqrt{(ab+ry)} - \sqrt{ab}$. Coll'

artificio

artificio consueto si trova l'ordinata $srs = \frac{a}{x}$ = 4,0535192954, la quale cala dalla media aritmetica fra vrv, yry = 4,7276543824 per 0,6741698840. Moltiplicando questa quantità per ts = Va. 0,0108040062, ne risulta l'aja = Va. 0,0072437192, che deve sottrarsi dall'aja $vyryrvrqiozmikrv$ = Va. 1,0654175749, onde rimanga l'aja $vyryrsrvrqrozmikrv$ = Va. 1,0612574157, ~~dimodochè resti l'aja~~

Per ottenere maggior esattezza divido sy per metà in t, e determino l'ordinata trt = 4,7941008462, che decresce dalla media aritmetica fra srs, yry eguale a 5,1310674544 per 0,3369671040. Si moltiplichi tale grandezza per st = Va. 0,0054042313, ed il prodotto Va. 0,0018203069 si sottri dall'aja $vyryrsrvrqrozmikrv$ = Va. 1,0612574157, dimodochè resti l'aja $vyrytrsrvrqrozmikrv$ = Va. 1,0594775088.

Volendo ristrignermi a tener conto soltanto delle parti millesime dell'unità, egli è superflua il dividere per due la linea ty = Va. 0,0054042313, ed il ricercare la corrispondente ordinata $\Delta r \Delta$ = 5,3645712399. Fatti i relativi computi, si dovrebbe sottrar l'aja = Va. 0,0004372542. Si osservi che il numero moltiplicante Va non contiene parti millesime dell'unità.

Egli è d'uopo frattanto l'indagare quanto calerebbe la nostra aja partendo nel punto p per metà la linea oq, e determinando il valore dell'ordinata $prp = \frac{a}{x}$ = 2,1145369820, che cala dalla media aritmetica 2,1725687399 fra le due

ordinate

ordinata oro, qzq per 0,0520494979.
Moltiplicando tale grandezza per op = Va.
0,0216046250, ne proviene l'aja Va.
0,0011879047, che va detratta dall'
aja Va. 1,05948375066.

Vediamo cosa succeda dividendo per
metà nei punti n, l le due linee om, mk
ciascuna eguale a 0,0464825 nona
parte della retta vy, e rintracciando i va-
lori delle ordinate nan = 1,5993743577
lal = 1,3190191243. La media arit-
metica 1,6582232035 fra le ordinate
oro, mam supera nan = 1,5993743577
per 0,0576453456. Si moltiplichi
questa differenza per mn = 0,0432162 5 Va,
ed il prodotto 0,0024994549 Va dovrà
sottrarsi dall'aja sovrascritta.

La media aritmetica 1,3351749563
fra kzk, mam eccede lal =
1,3190191243 per 0,0181556340.
Moltiplico questa grandezza per kl =
0,0432162 5 Va, e trovo il prodotto =
0,000694194 8 Va, per cui si ha da
scemare l'aja mentovata. Non contenen-
do questo alcuna porzione millesima
della unità, egli è superfluo il continuare
a dividere per metà le rimanenti sei no-
ne parti di vy, che darebbero aje da
sottrarsi sempre più minute.

Molto più superfluo riuscirebbe il
partire per due le porzioni ottave della retta
Qv, differendo le ordinate estreme vrv = 1,
Q'rc = 1,0645190412 soltanto per
0,0645190412.

Raccolgo in una somma l'aja da
sottrarsi

0,0003705427 Va
0,0001168904 2 Va
0,0024994549 Va
0,0006981946 Va

0,0047365 0485 Va. Levata questa somma dalli aja più volte nominata 1,0594375 0468 Va, rimane 1,0547 0100 42 Va = yyzyztasx avzgzproznamzlakav. Si aggiungano la due aja yzzzzy = 0,0973735 4804 Va ℓ'wavac = 0,91435 638 21 Va, e ne risulterà li aja ℓ'zzzzy azaz5avzgzp zoznam zlakavac = 2,0701924 672 Va = T tempo impiegato dal grave a discendere per l'arco (Fig. 4.) OEDFB = 112°, 46', 11".

Egli è manifesto, che il tempo per l'arco = 112°, 46', 25" sarà una mica più lungo dello scoperto. In altra occasione ho provato, che la corda di un tal arco si passa nel tempo stesso che le corde dei due semi=archi, supposto che nel transito dall'una all'altra non si perda velocità. Si inferisca dunque, che quando la corda dell'arco intero, e le due corde dei semiarchi si scorrono nel medesimo tempo = 2 Va dal grave, impiega questo tempo maggiore a discender per li archi.

Ho altresì dimostrato, che se l'arco si agguaglia al quadrante, si spende dal grave il tempo 1,47 2 7 6 Va a viaggiare per le corde dei due mezzi archi, ed a viaggiare pel quadrante il tempo un poco minore di 1,75945 6 4 3 6 Va. Il perchè dobbiamo conchiudere darsi un arco minore di 112°, 46', 11", che si scorre nel tempo stesso

che

che la sua corda, ed in tempo più lungo che la due corde dei semiarchi. Accostandosi maggiormente al quadrante, ci sarà un arco, che si passerà nel tempo medesimo che le due corde, ch'è superato dal tempo per l'unica corda. Procedendo avanti; il tempo per l'arco è il più breve; il tempo per la corda il più lungo, e medio quello per le due corde.

B

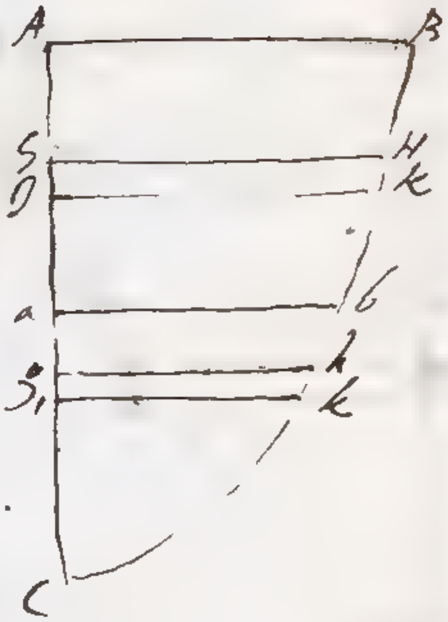
D
B

BI
N

Soluzione di un Problema proposto ai Geometri d'Italia dal Sig.r Nicolò Bernulli.

Soluzione del
Problema proposto ai Geometri
di Italia dal Sig.r Nicolò
Bernoulli

Il punto C sia il centro delle forze. BbC la curva, le cui applicate BA, ba esprimono le forze centripete giusta le diverse distanze CA, Ca, ed insieme i tempi, che consuma il mobile principiando la caduta da' punti A, a, e scendendo per le distanze AC, aC, si ricerca che curva sia questa BbC, ovvero in qual ipotesi di forze i tempi delle discese per AC, aC da' punti A a della quiete siano proporzionali alle forze esercitate nelle distanze CA, Ca.



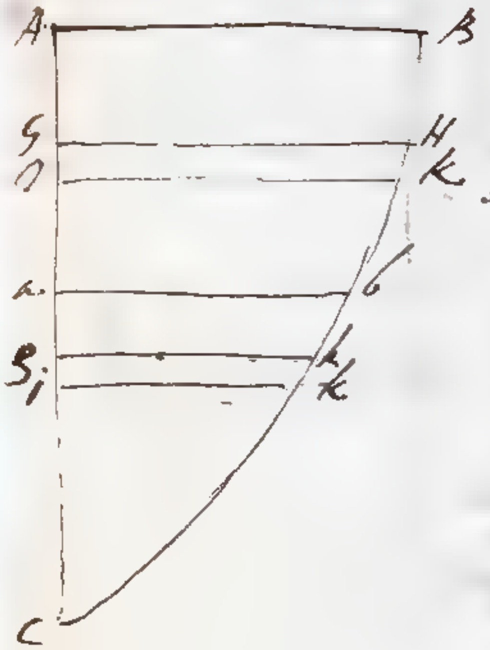
Soluzione

La curva ricercata BbC è una Parabola prima cubica.

Dimostrazione

Egli è noto che l'aree ABC, abC sono proporzionali ai rettangoli CA.B, Cab. Ma per la natura della detta curva $\overline{AB}$ come $\overline{AC}^{\frac{1}{3}}$ ab come $\overline{aC}^{\frac{1}{3}}$; dunque le mentovate aree stanno fra loro come $\overline{AC}^{\frac{4}{3}} : \overline{aC}^{\frac{4}{3}}$. Si prendano i due punti analoghi G, g di modo che sia AG : ag :: AC : aC ed è facile ad iscoprirsi che le aree parziali AGHB, aghb serberanno la ragione delle totali ABC, abC, o sia di $\overline{AC}^{\frac{4}{3}} : \overline{aC}^{\frac{4}{3}}$. Chiamo U, u le velocità da' due mobili acquistate discendendo per

gli



gli spazj AG, ag le quali come è ben noto ai Geometri sono proporzionali alle radici delle aree AGHB, aghb ovvero nel nostro caso ad $\overline{AC}^{\frac{2}{3}}$ $\overline{aC}^{\frac{2}{3}}$. Segni gli spazietti infinitesimi GD, gi e che si riguardino nella ragione di AC, aC, e chiamati dT, dt i tempicelli in cui si trascorrono colle velocità U, u, avremo per le note formole

$$dT : dt :: \frac{GD}{U} : \frac{gi}{u} : \frac{AC}{\overline{AC}^{\frac{2}{3}}} : \frac{aC}{\overline{aC}^{\frac{2}{3}}}$$

$$:: \overline{AC}^{\frac{1}{3}} : \overline{aC}^{\frac{1}{3}}$$

Ora verificandosi questa proporzione di tutti i tempicelli dT, dt, ed essendo composti i tempi T, t di un pari numero di tempi elementari dT, dt; mentre quanti spazietti GD sono contenuti nello spazio AC altrettanti gi ne comprende lo spazio aC, ne segue per conseguenza essere T : t, o sia i tempi ~~per~~ delle cadute per AC, aC come $\overline{AC}^{\frac{1}{3}} : \overline{aC}^{\frac{1}{3}} :: AB : ab$, che è quanto a dire come le forze agenti nelle distanze AC, aC come dovea dimostrarsi.

Altramente

Dovrebbe bensì vedere, che la presente dimostrazione convince sì ma non insegna la maniera, colla quale si è stato da me scoperto, che

che la parabola prima-cubica sodisfa al Problema. A questi tali riuscirà più a genio la seguente soluzione. Tenute ferme la proporzione, e le denominazioni superiormente usate, le note formole mi somministrano l'analogia

$GH \cdot \delta T^2 : GD :: gh \cdot \delta t^2 : gi$

e sostituendo in vece di GD, gi le linee proporzionali AC, aC, alternando, dividendo per GH, gh, ed' estraendo la radice

$$\delta T : \delta t :: \frac{\overline{AC}^{\frac{1}{2}}}{GH^{\frac{1}{2}}} : \frac{aC^{\frac{1}{2}}}{gh^{\frac{1}{2}}}$$

facciasi GH come $\overline{GC}^n$, gh come $\overline{gC}^n$ (n è una quantità da determinarsi in progresso della operazione) ed' essendo $GC : gC :: AC : aC$, si verifica altresì la proporzione

$GH : gh :: \overline{AC}^n : \overline{aC}^n$

Surrogati questi valori proporzionali in cambio di GH, gh si scoprirà

$$\delta T : \delta t :: \overline{AC}^{\frac{1-n}{2}} : \overline{aC}^{\frac{1-n}{2}}$$

e per la ragione esposta nella prima dimostrazione

$$T : t :: \overline{AC}^{\frac{1-n}{2}} : aC^{\frac{1-n}{2}}$$

ma deve pure verificarsi

$$T : t :: AB : ab :: \overline{AC}^n : \overline{aC}^n$$

Dunque $\frac{1-n}{2} = n$ e conseguentemente $n = \frac{1}{3}$, cioè a dire GH come $GC^{\frac{1}{3}}$, proprietà della prima

Parabola

Parabola cubica, ch'è quella curva che soddisfa al problema proposto, conforme dovea dimostrarsi.

Soluzione
di due Problemi
Meccanici

[illegible]
[illegible]
[illegible]

Determinare la curva, che descrive il corpo M, che nel girarsi con moto equabile della verga rigida e priva di inerzia CM intorno il centro C possa scorrere liberamente lungo essa verga. 14 Gen.° 1757 1791

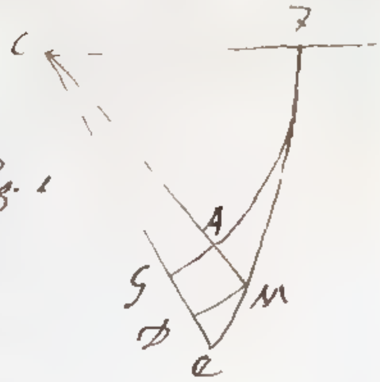


Fig. 1

Sia CZ fig. 1 la positura della verga quando al punto Z della stessa si applica il corpo M. Dopo che il punto Z della verga si è girato per la porzione di circolo ZA il corpo si ritrovi in M, e mentre il punto A seguita a camminare per l'archetto AG, il corpo M scorra lo spazietto Me. Tirate le due CM, Ce, e fatto centro in C, col raggio CM si descriva l'arco minimo MD.

Pongo CZ = a, la velocità equabile del punto Z della verga = b, ZA = z, AG = dz, MD = dx, CM = y, De = dy, la massa del corpo = m, U la velocità colla quale esso scorre lo spazio Me, ed u, v le velocità per gli spazj MD, De nelle quali possiamo immaginare risolta la velocità U.

La forza centrifuga nel punto M si esprime conforme è noto per $\frac{mu^2}{y}$, e questa agisce per lo spazio De = dy, mentre il corpo si trascorre da M in e. La nominata azione genera la incremento di forza viva mvdv, di modo che ne risulta l'equazione

$$\frac{mu^2 dy}{y} = mvdv$$

e conseguentemente integrando omessa la costante perchè

nel

a

nel punto Z dove comincia l'azione della forza centrifuga si eguaglia a nulla la velocità v che allontana il corpo dal centro, $r \int \frac{u^2 dy}{y} = v^2$ (1)

Le velocità ~~dei punti~~ b, u dei punti A, M per gli archi AG, MD stanno come i raggi $CA = a$, $CM = y$ e quindi si presenta l'analogia

$$a : b :: y : u = \frac{by}{a}$$

Scorrendosi inoltre gli spazj $AG = dz$, $DO = dy$ nel tempo stesso colla velocità b, v serberanno queste la ragione degli spazj stessi onde avremo

$$dz : dy :: b : v = \frac{b\,dy}{dz}$$

Sostituiti nella formola (1) in cambio di u, v i ritrovati valori ~~[illegible]~~ avremo

$r \int \frac{b^2 y\, dy}{a^2} = \frac{b^2 dy^2}{dz^2}$ ossia

$\frac{b^2}{a^2} \int y\, dy = \frac{b^2 dy^2}{dz^2}$ e differenziando

posta dz costante $\frac{y\, dy}{a^2} = \frac{dy\, ddy}{dz^2}$

ossia $\frac{dz^2}{a^2} = \frac{ddy}{y}$ e conseguentemente

$\frac{y}{a}$ e facendo l'attuale integrazione non tralasciata l'aggiunta della costante

$\frac{b^2 y^2}{a^2} - g = \frac{b^2 dy^2}{dz^2}$ ed estratta la radice

$\sqrt{\frac{b^2 y^2}{a^2} - g} = \frac{b\, dy}{dz}$. Ma nella equazione

(7

CZ $\frac{b\,dy}{dz} = v = 0$ ed $y = CZ = a$;

Dunque in tal caso $\frac{b^2a^2}{a^2} - g = 0$

e per conseguenza $g = b^2$ e la nostra equazione congiunta

$$\sqrt{\frac{b^2y^2}{a^2} - b^2} = \frac{b\,dy}{dz}\text{, o sia}$$

$$\sqrt{y^2 - a^2} = \frac{a\,dy}{dz}\text{, e finalmente}$$

$$dz = \frac{a\,dy}{\sqrt{y^2-a^2}} \quad 2).$$

Ma per i triangoli simili CAG, CMD

$$a : dz :: y : dx\text{, e perciò}$$

$$dz = \frac{a\,dx}{y}\text{; Dunque sostituendo}$$

$$dx = \frac{y\,dy}{\sqrt{y^2-a^2}} \quad 3)\text{,}$$

equazione differenziale nostra nuova riferita al foco, ed comune alla ~~equilatera~~ all'iperbola equilatera riferita agli assi, la cui equazione finita è

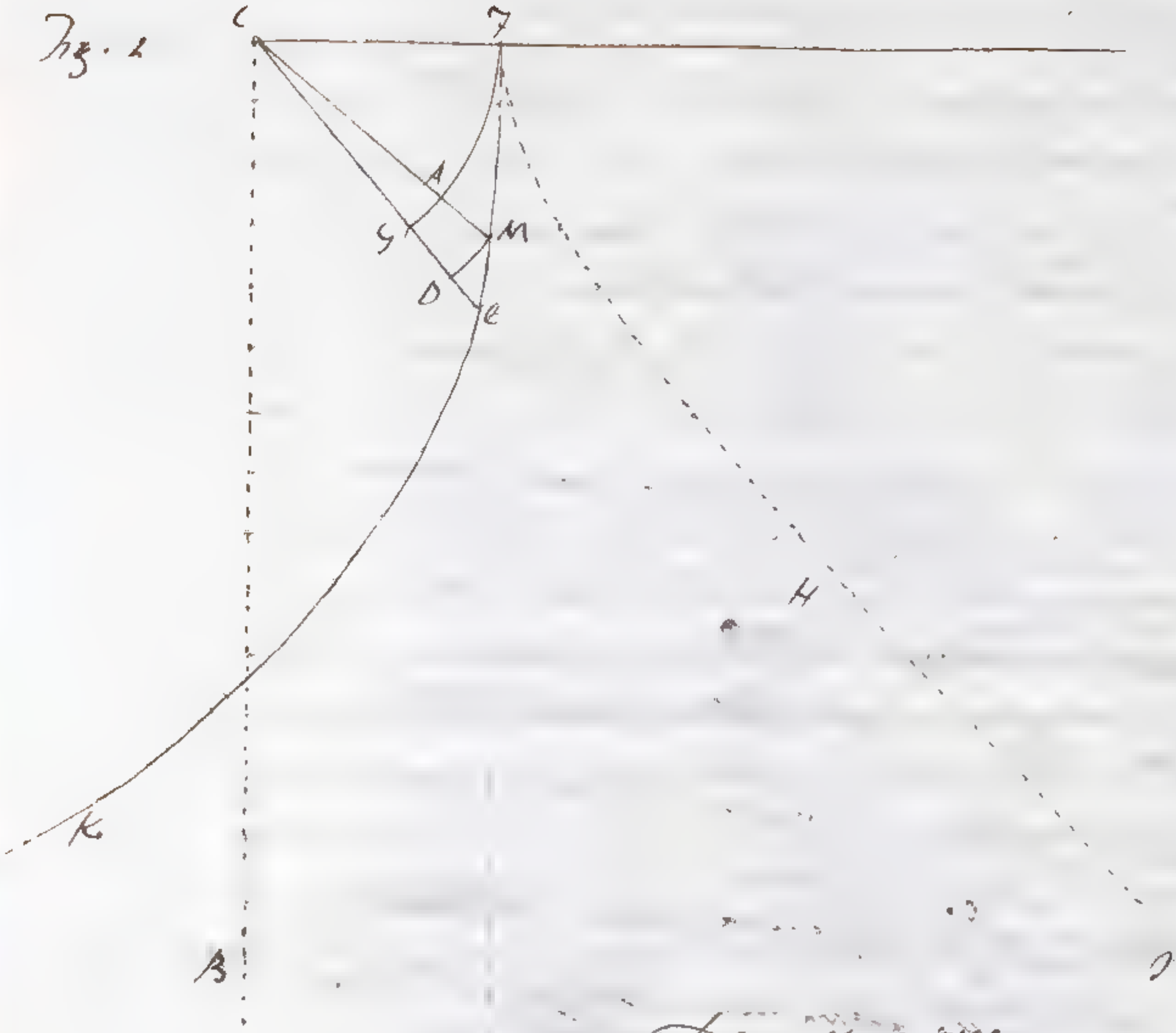
$$x = \sqrt{y^2-a^2}.$$

Prima Costruzione

Col centro C, e col semidiametro CZ=a alli assi CB si descriva l'iperbola equilatera ZHI. Si concepisca poscia che stando rigide le ordinate la linea retta delle ascisse CB si ravvicini nel punto Z e la convoluta nascente ZMCK sarà la curva descritta dai corpi (m).

a

Fig. 2



Dimostrazione

Una qualunque nuova e la stessa convoluta si appoggiano la medesima equazione differenziale; ma l'equazione differenziale della nostra Iperbola è $dx = \frac{y\,dy}{\sqrt{y^2-a^2}}$; dunque la stessa nuova ZMEK convoluta parimente alla nuova ZMEK convoluta della Iperbola ZHI. Il che &c.

Seconda Costruzione

Presa a maneggiare la formola (n) $dx = \frac{a\,dy}{\sqrt{y^2-a^2}}$ si faccia $\sqrt{y^2-a^2} = p-y$, ed adempiuti

i necessarj calcoli si avranno

$$2y = \rho + \frac{a^2}{\rho}\ (4),\quad \sqrt{y^2-a^2} = \frac{\rho^2-a^2}{2\rho}$$

$$dy = \frac{\rho^2-a^2}{2\rho^2}\, d\rho\ ;$$ e finalmente

$$dz = \frac{a\,dy}{\sqrt{y^2-a^2}} = \frac{a\,d\rho}{\rho}\ (5).$$

Quest'ultima equazione appartiene alla Spirale Logaritmica semirettangola, in cui (z) sono gli archi del circolo il cui raggio (a), e (ρ) le ordinate.

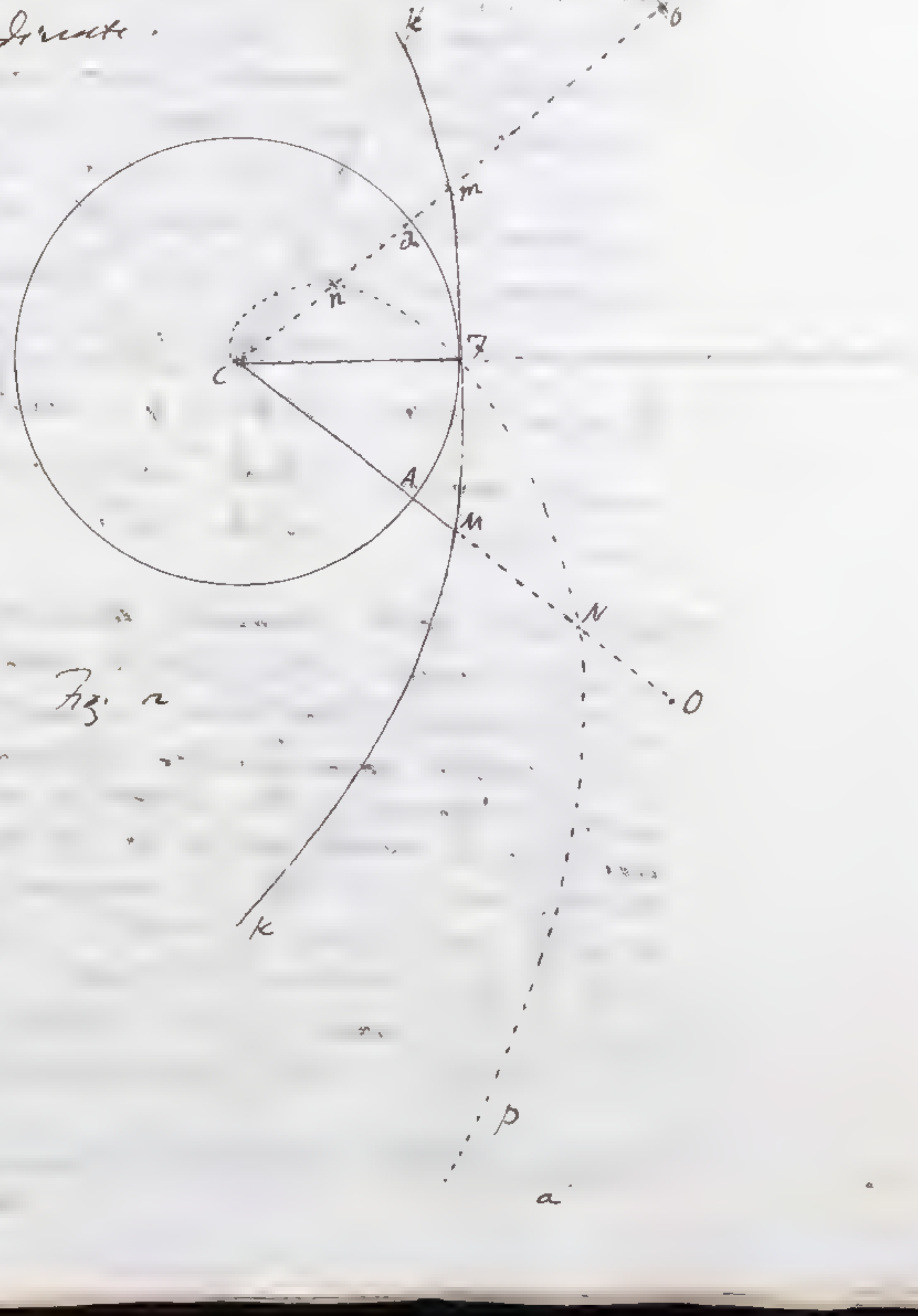


Fig. 2

posimo un circolo col centro C, e col raggio CZ = a, ci si
Descritta adunque la Spirale Logaritmica semirettangola Cn Z N D che passi per il punto Z (fig. 2ª), si prendano di essa due archi eguali ZA, Za, e condotte le rette CA, Ca che si prolunghino indefinitamente, si tagli NO = Cn, e divisa poscia per metà la linea CO nel punto M, dico che esso punto M appartiene alla cercata curva ZMK.

Dimostrazione

Essendo eguali gli archi ZA, Za, per la natura della Logaritmica spirale richiede, che formino una continua proporzione geometrica le tre linee CN = p, CZ = a, Cn = NO, la quale conseguentemente si eguaglia a $\frac{a^2}{p}$. Avremo pertanto $CO = CN + NO = p + \frac{a^2}{p}$; ma per la formola (4) $ay = p + \frac{a^2}{p} = CO$; dunque $\frac{CO}{2} = CM = y$ ordinata della nostra curva ZMK corrispondente all'arco ZA = z; ciò che &c.

Della nostra posta seconda costruzione si vale il Sig.r Giovanni Bernoulli (a) nella soluzione del presente problema, a cui la ha condotto un metodo totalmente diverso dal mio. Veggansi i due corollarj che egli cava, cioè che la nostra curva ha un ramo Zmk dalla parte delle z negative totalmente simile al ramo ZMK, e che le ordinate CM è la minima di tutte.

Io finirò con una curiosa riflessione, ed è che sciogliendo nella equazione (2) $dz = \frac{a\,dy}{\sqrt{y^2-a^2}}$

(a) Johannis Bernoulli Opera Omnia. Lausannæ et Genevæ 1742 pag. 251

la velocità (b) del punto Z della verga
che si gira intorno al centro C; si abbiamo
~~[illegible]~~ a dedurre la conseguenza
quanto a prima vista inesatta, altrettanto vera, che
qualunque sia il valore della velocità
b, il corpo (m) descrive sempre la me-
desima curva ZMK.

B

八

Problema.

Abbiasi un vette ACN mobile intorno al punto C, il cui braccio CA sia orizzontale. Sia queste vette collocate in un piano verticale, e tale sia parimente il piano MN, e di più normale al piano del vette. Una sfera H tocchi il braccio CN nel punto B, ed il piano MN nel punto D; si cerca il valore del peso P pendente dal punto A, che faccia equilibrio col peso della sfera H.

Il vette ACN facendo un minimo moto si trasferisca nel sito aCn; ed i punti A, N descrivano gli archetti simili Aa, NO, e per consequenza il centro H della sfera discenda per la spazietto verticale Hh, e la sfera stessa tocchi il braccio Cn del vette nel punto b, ed il piano MN nel punto d. Prolungata AC sino in M, pongo $Aa = ds$, $CA = a$, $CM = b$, $MN = c$, $CN = g = \sqrt{(b^2+c^2)}$, ed il raggio della sfera, cioè $HD = hd = HA = hb = r$. Essendo simili gli archi Aa, NO, avremo

$$CA : Aa :: CN : NO$$

$$a : ds :: g : \frac{g\,ds}{a} = NO.$$

E poichè passa similitudine fra i triangoli MCN, ONn, dalla analogia

$$MC : MN :: NO : On$$

$$b : c :: \frac{g\,ds}{a} : \frac{cg\,ds}{ab} = On$$

raccoglieremo $On = \frac{cg\,ds}{ab}$, e quindi $Cn = g + \frac{gc\,ds}{ab}$. Avremo inoltre

$$MC : CN :: NO : Nn$$

$$b : g :: \frac{g\,ds}{a} : \frac{g^2 ds}{ab} = Nn;$$ ed

$Mn = c + \frac{g^2 ds}{ab}$.

Dal centro H della sfera ho supposto tirata la verticale Hh, che ora continuo, finchè tagli CN nel punto K, per cui conduco KL parallela

a

a CM. La simiglianza dei triangoli CMN, HBK, KLN somministra le analogie

$$CM : MN :: HB : BK$$
$$b : c :: v : \frac{cv}{b} = BK$$
$$CM : CN :: LK : KN$$
$$b : g :: v : \frac{gv}{b} = KN$$

dalle quali deduco $BN = BK + KN = \frac{(c+g).v}{b}$, e conseguentemente $CB = CN - BN = g - v.\frac{(c+g)}{b} = \frac{g.(b-v) - cv}{b}$. Facciasi

$$CA : Aa :: CBH : BF$$
$$a : ds :: \frac{g.(b-v)-cv}{b} : \frac{(g.(b-v)-cv).ds}{b} = AF$$

e si scoprirà il valore della linetta AF, che è una continuazione della retta HA.

Si renderà nota la misura di Cb, sostituendo in cambio di $g = CN$ la quantità $g + \frac{gc\,ds}{ab} = Cn$, e in cambio di $c = MN$ la quantità $c + \frac{g^2 ds}{ab} = Mn$, onde ci si presenti $Cb = \frac{g.(b-v)-cv}{b} + \frac{gc\,ds.(b-v)}{ab^2} - \frac{g^2 v\,ds}{ab^2}$; ma $CA = CF = \frac{g.(b-v)-cv}{b}$; dunque $Fb = \frac{(b-v).gc\,ds - g^2 v\,ds}{ab^2}$.

Lo angolo CAH = CAF è retto, perchè la sfera tocca il braccio CAN del retto nel punto B, e quindi l'angolo CFA cala dal retto per l'angolo ACF, e per altrettanto cresce l'angolo HFA. Delineata hE normale ad HF, si faccia l'angolo EFG = ACF, e rimarrà retto l'angolo GFb uguale all'hbF, toccando la Cbn nel punto b la sfera, dopo che è discesa per lo spazio Hh. Per la qual cosa le linee GF, hb saranno esattamente parallele. Le linee bF, hG sono tali adeguatamente, essendo retto l'angolo GFb, e superando hGF un retto per l'angolo infinitesimo EFG. Il notato menomissimo divario non turba l'egualità delle rette hb, GF senon per una grandezza minima del

secondo

secondo ordine, imperciocchè hG, bF sono infinitamente piccole del primo grado. Avremo pertanto $GF = hb = v$, $hG = bF = \frac{(b-v).gc\,ds - g^2 v\,ds}{ab^2}$. Si aggiunga $GE = \frac{v\,ds}{a}$ per la similitudine dei triangoli CAa, FEG, e ne risulterà $hE = hG + GE = \frac{(b-v).gc\,ds - g^2 v\,ds}{ab^2} + \frac{v\,ds}{a} = \frac{(b-v).gc\,ds - (g^2 - b^2).v\,ds}{ab^2} = \frac{(b-v).gc\,ds - c^2 v\,ds}{ab^2}$.

I triangoli simili NMC, hEH ci danno la analogia

$$MN : CN :: hE : Hh$$
$$c : g :: \frac{(b-v).gc\,ds - c^2 v\,ds}{ab^2} : \frac{(b-v).g^2 ds - cgv\,ds}{ab^2}$$
$$MN : MC :: hE : HE$$
$$c : b :: \frac{(b-v).gc\,ds - c^2 v\,ds}{ab^2} : \frac{(b-v).g\,ds - cv\,ds}{ab}$$

che determinano $Hh = \frac{(b-v).g^2 ds - cgv\,ds}{ab^2}$, $HE = \frac{(b-v).g\,ds - cv\,ds}{ab}$. Ho di sopra assegnato a AF questo ultimo valore. Ed infatti essendo $HA = EF = v$, sottratto il comune segmento EB, rimane $HE = BF$.

Or eccoci pervenuti alla soluzione del proposto Problema. Espresso per H il peso della sfera, c'insegna il metodo delle azioni, che si otterrà l'equilibrio, quando si verifichi l'equazione $H.Hh = P.Aa$, ossia usati i valori analitici $H.\left(\frac{(b-v).g^2 - cgv}{ab^2}\right).ds = P\,ds$, e perciò

$$P = H.\left(\frac{(b-v).g^2 - cgv}{ab^2}\right)$$

Posto che sia $MN = c = 0$, ne proviene $CA = g.\left(\frac{b-v}{b}\right)$: ma in tal ipotesi $g = b$; dunque $CA = b-v$. Si aggiunga, che la linea CN cadendo sopra la CM, e dovendo la sfera toccare il piano IN, esser dee $AN = \left(\frac{g+c}{b}\right).v = v$, onde giustamente resti $CB = b-v$. Avremo pertanto $H.(b-v) = P.a$, e ne raccoglieremo, che in questa circostanza possiamo ricorrere alla legge della vetta; perchè sendo $CF = CA$, ed $Fb = \frac{(b-v).gc\,ds}{ab^2} = 0$, la sfera non passa da un punto

all.

all'altro del vette, ma si ferma nel punto B

Si stabilisca $MN = c = \infty$, e per conseguenza, supposta $CM = b$ finita, $CN = g = MN = c$, ne proverrà $H.\frac{(b-2v).c^2}{ab^2} = P$, formola che m'istruisce richiedersi un peso infinito P per far equilibrio col peso finito H della sfera: e vaglia il vero, lo spazio, per cui agisca il peso H, cioè Hh si eguaglia nella nostra ipotesi a $\frac{(b-2v)c^2 ds}{ab^2}$, ed essendo infinitamente maggiore dello spazio $Aa = ds$, per cui reagisce il peso P, egli è manifesto che per conservar l'equilibrio, il peso P ha da ricevere il valore infinito $H.\frac{(b-2v).c^2}{ab^2}$, onde la sua reazione $\frac{H.(b-2v).c^2.ds}{ab^2}$ pareggi l'azione $H.\frac{(b-2v)c^2 ds}{ab^2}$ della sfera.

Col far uso della legge del vette, non si può generalmente sciogliere il presente Problema, supponendo esso, che la sfera H tocchi costantemente nel punto B il braccio CN del vette ACN, e ricercando il Problema, che il contatto si trasferisca da punto a punto. Vediamo a qual formola ci conduca la legge del vette.

Espresso per HK il peso H della sfera, la forza di detto peso si risolverà nelle due HB premente il braccio CN del vette, e BK, che spinge per la direzione del braccio suddetto. I triangoli NCM, KHB sono simili, e quindi avremo

$$CN : CM :: HK : HB$$
$$g : b :: H : \frac{H.b}{g}$$
$$CN : NM :: HK : BK$$
$$g : c :: H : \frac{H.c}{g}$$

e ci si renderanno note la pressione $HB = H.\frac{b}{g}$, sofferta dal braccio CN, la quale tenta di esercitar azione per lo spazio $HE = \frac{(b-v).g.ds - cv ds}{ab}$,

ai

e la forza $BK = H \cdot \frac{c}{g}$, che tenta d'agire per lo spazio $Eh = \frac{(b-v) \cdot gc\,ds - c^2 v\,ds}{ab^2}$, mentre il peso P si sforza di reagire per lo spazio $Aa = ds$.

La legge del vette suppone la sfera connessa col braccio CN nel sito B, e per conseguenza impedita l'azione della forza $BK = \frac{Hc}{g}$. Dovrebbe dunque trovarsi $\frac{Hb}{g} \cdot HE = \frac{Hb}{g} \cdot BF = P \cdot Aa$; ma $BF : Aa :: CB : CA$; dunque $\frac{Hb}{g} \cdot CB = P \cdot CA$; e sostituendo in luogo di CB e di CA i loro valori, $\frac{Hb}{g} \cdot \left(\frac{g \cdot (b-v) - cv}{b}\right) = H \cdot \left(\frac{g \cdot (b-v) - cv}{g}\right) = P \cdot a$; ossia $H \cdot \left(\frac{g \cdot (b-v) - cv}{ag}\right) = P$, formola, che non s'accorda colla $H \cdot \left(\frac{g^2 (b-v) - cgv}{ab^2}\right) = P$, a cui siam pervenuti sciogliendo rettamente il Problema, se non quando $g = b$.

Non essendo realmente impedita l'azione $BK \cdot Eh = \frac{H \cdot c}{g} \cdot \left(\frac{(b-v) \cdot gc\,ds - c^2 v\,ds}{ab^2}\right)$ dalla forza BK, si aggiunga questa all'azione della forza HB, e la somma di tali azioni si uguaglierà alla reazione del peso P, onde si abbia $\frac{Hb}{g} \cdot \left(\frac{(b-v) \cdot g\,ds - cv\,ds}{ab}\right) +$ $\frac{Hc}{g} \cdot \left(\frac{(b-v) \cdot gc\,ds - c^2 v\,ds}{ab^2}\right) = P\,ds$, ossia $\frac{Hb^2}{g} \left(\frac{(b-v) \cdot g\,ds - cv\,ds}{ab^2}\right) + \frac{Hc^2}{g} \left(\frac{(b-v) \cdot g\,ds - cv\,ds}{ab^2}\right) = P\,ds$. e perché $b^2 + c^2 = g^2$, troveremo finalmente $H \cdot \left(\frac{(b-v) \cdot g^2 - cgv}{ab^2}\right) = P$, ch'è quella stessa formola, a cui ci ha condotti la soluzion del Problema. Merita riflessione, che la forza $\frac{Hb}{g}$ procura di far girare il vette, e la forza $\frac{Hc}{g}$ stimola la sfera, acciocché passi da un punto B all'altro b del braccio CN.

Benché abbia ristretto la soluzione alle condizioni, che il braccio CA del vette ACN sia orizzontale, e che il piano MN sia verticale;

nulla dimeno

nulladimeno essa può agevolmente rendersi generale. Il retto A C N (Fig. a.) non si acco modi alle predette condizioni, e la palla H tocchi il piano inclinato I N nel punto D, ed il braccio C N del retto nel punto B. Fatto poscia dal retto un minimo moto angolare, i due contatti si trasferiscano in d, b. Dal punto C si meni M C A′ normale ad I N, ed indi si effettui la preparazione come nella prima soluzione. Conducasi pel punto A la verticale A q′, che venga tagliata in A′ dalla retta M C A′, e si descrivano li archetto A′a′ simile alli Aa, le orizzontali aq, a′q′, hp, I C R, e le verticali Hp, I S.

O penda il peso P dal punto A, o dal punto A′, eserciterà una pari azione, quando il retto fa transito da A C N in a C n. E vaglia il vero, i triangoli aAq, A C R; a′A′q′, A′C R sono simili, come è facile a dimostrarsi. Avremo dunque

$$Aa : Aq :: CA : CR = Aq . \frac{CA}{Aa},$$
$$A'a' : A'q' :: CA' : CR = A'q' . \frac{CA'}{A'a'} :$$

ma essendo simili gli archetti Aa, A′a′, le quantità $\frac{CA}{Aa}$, $\frac{CA'}{A'a'}$ sono eguali; dunque $Aq = A'q'$, e per conseguenza in ambe le circostanze il peso P eserciterà pari azione. Il perchè al braccio CA si può sostituire il CA′.

Pongo $CA' = a$, $A'a' = ds$, $CM = b$, $MN = c$, $CN = g$, $HB = v$, e cogli stessi raziocinj usati nella premessa soluzione scopro $Hh = \left(\frac{(b-v).g^2 - cgv}{ab^2}\right).ds$. Sono parallele le tre linee I N, a′A′, Hh, e tali sono parimente le tre I S, q′A′, Hp, e perciò si eguagliano gli angoli N I S, a′A′q′, h H p, la misura dei quali è nota, siccome quella ch'è determinata dalla inclinazione del piano I N alla verticale I S. Quindi nei simili

triangoli

triangoli rettangoli $a'A'q'$, hHp è data la ragione fra i lati $A'a'$, $A'q'$; Hh, Hp, onde si abbia $A'q' = n.A'a'$, $Hp = n.Hh$. Or tentando di agire il il peso H della palla H per $Hp = n.Hh$, e il peso P di reagire per $A'q' = n.A'a'$, si conserverà l'equilibrio, quando si osservi l'equazione $H.n.Hh = P.n.A'a'$, o sostituendo i valori analitici $H.\frac{((b-v).g^2 - cgv)}{ab^2}.nds = P.nds$, e fatta la divisione per nds, $H.\frac{((b-v).g^2 - cgv)}{ab^2} = P$, che è la stessa formola scoperta nella prima soluzione, la quale per conseguenza si verifica generalmente. Fatta la riflessione, che $\frac{(b-v).g - cv}{b} = CA$, $g = CN$, $a = CA'$, $b = CM$, la nostra formola si potrà esprimere nella seguente maniera
$H.\frac{CA.CN}{CA'.CM} = P$. Ma condotta AT parallela ad IN, $\frac{CN}{CM} = \frac{CA}{CZ}$; dunque $\frac{H.\overline{CA}^2}{CA'.CZ} = P$. Inoltre $CA' : CR :: CT : CZ$, ed essendo perciò $CA'.CZ = CR.CT$, adempiuta la sostituzione scopriremo $\frac{H.\overline{CA}^2}{CR.CT} = P$. A questa equazione perviene l'Ab. Vincenzo mio fratello nel Capitolo vigesimo settimo del Libro primo dei Principj, e dei Metodi della Meccanica.

Soluzione di due Problemi
Meccanici

190 Determinare il viaggio ADC del progetto A, il quale partendosi dal punto A cammini per un mezzo di resistenza costante: e ciò supposto vero il principio di Leibnizio che se il mobile A in virtù della sola forza orizzontale impressa si troverà dopo un dato tempo nel punto M, e in virtù della sola gravità dopo lo stesso tempo nel punto H; esso dopo il tempo stesso altrove si rinverrà in [illegible]

Si concepisca il mobile A privo di gravità, a cui si imprima una data velocità $= (a)$, per l'orizzontale AZ, e camminando esso mobile per un mezzo di uniforme resistenza $= r = 1$, suppongasi ~~[illegible]~~ che dopo un determinato tempo $= t$ abbia scorso lo spazio $AM = s = HD$. Chiamata (u) la velocità del mobile in M, e fatta la riflessione, che per la natura delle resistenze assolute i decrementi delle forze sono proporzionali agli elementi degli spazj; avremo la formola $ds = -udu$ la quale integrata ci dà $a^2 - 2s = u^2$. Si è aggiunta la costante (a^2) perchè posto $s = 0$, cioè a dire quando il progetto A comincia a muoversi, si trova ~~[illegible]~~ $u = a$ uguale alla totale velocità impressa. Nella stessa formola se si supporrà $u = 0$, avremo $a^2 = s$, cioè a dire lo spazio uguale a ~~tutta la~~ primitiva forza perduta a^2; laonde ~~in fine del predetto spazio la velocità necessariamente diverrà nulla~~ la velocità (u) del mobile sarà nulla, quando da esso mobile si sarà ~~tutta~~ la forza perduta.

Quando ~~dunque~~ pertanto $a^2 - s = u^2$ dunque cavando la radice $\sqrt{a^2 - s} = u$. Ma per le note formole $rdt = -du$; dunque integrando $t = a - u$, e sostituendo in vece di (u) il valore sopra trovato, avremo $t = a - \sqrt{a^2 - s}$, il qual luogo è a una Parabola Apolonia di facile descrizione.

Supponendo che tolto di mezzo la velocità impressa orizzontale, il grave A discendesse per la verticale AB soggetto alla stessa legge di resistenza, si rinverrà agevolmente la scala dei tempi col mezzo delle seguenti formole. Chiamata (g) la gravità naturale, la forza ~~[illegible]~~ sollecitante residua, che stimola il corpo A alla discesa sarà $g - r = f$; dunque $fdS = 2UdU$, et $fdT = dU$, contrasegnando nel caso nostro colle lettere maiuscole gli spazj variabili AH, le velocità, ed i tempi corrispondenti. Quindi formando $\sqrt{fS} = U = fT$, ossia $\frac{\sqrt{S}}{\sqrt{f}} = T$.

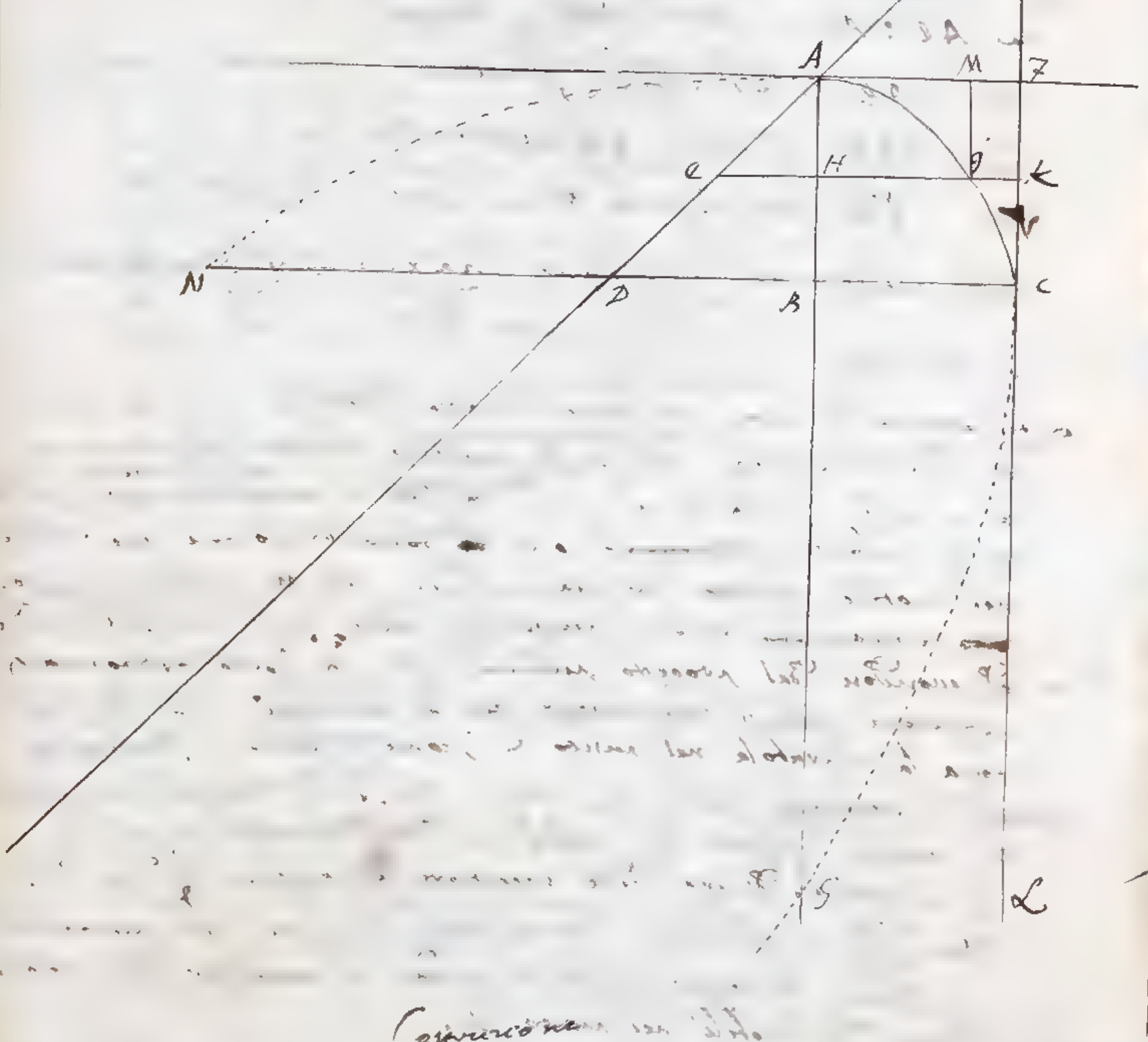
E perchè i moti tanto orizzontali quanto verticali ~~si suppongono~~ per le rette AM, AH si vogliono fatti nel tempo stesso, avremo $t = T$, e conseguentemente $a - \sqrt{a^2 - s} = \frac{\sqrt{S}}{\sqrt{f}}$, la quale equazione colle debite operazioni si riduce alla seguente

$$s + \frac{S}{f} = 2a\frac{\sqrt{S}}{\sqrt{f}},$$

ed a cui corrisponde la oltrascritta costruzione

$DC = 2a^2$, $\left.\begin{matrix} DB \\ BC \end{matrix}\right) = \frac{a^2}{2}$; $AB = f\frac{a^2}{..}$, $AG = a\,f a^2$, $AD = \sqrt{1+ff}\,\frac{a^2}{..}$;

punto che si determina col compire il rettangolo HM quando le due mentionate forze agiscono unitamente.



Costruzione [illegible]

S, U; T

Quando nella linea orizontale indefinita NC le due porzioni BC, BD ambe eguali ad (a^2) cioè a dire al quadrato della velocità, ossia alla forza orizontale impressa, indi dal punto B alzo la verticale BA $= fa^2$, che sia rispetto alla e alla altezza delle linee rette DB, BC in proporzione come $f : 1$, o come $f : 1^2$. Dopo ciò conduco la diagonale AD, ed al vertice A intorno il diametro AD descrivo la Parabola Apolloniana ACG, le cui ordinate e i segni paralleli a DC, che passi per il punto dato C: io dico ~~che la porzione~~ che questa curva risponde alla nostra ultima equazione,

19[a] in maniera che le ascisse AH esprimono gli spazj verticali S, e le ordinate HI gli spazj orizzontali s.

Dimostrazione

Per la proprietà della Parabola è $AC : AD :: \overline{CI}^2 : \overline{DC}^2$, ma $AC : AD :: AH : AB$; dunque

$$AH : AB :: \overline{CI}^2 : \overline{DC}^2 \text{, ossia}$$

$$\sqrt{AH} : \sqrt{AB} :: CI = CH + HI : DC$$

$$\sqrt{S} : \sqrt{fa^2} :: \frac{S}{f} + s : 2a^2$$ e passando

dalla analogia alla equazione $\frac{2a^2 \times \sqrt{S}}{\sqrt{fa^2}} = \frac{2a\sqrt{S}}{\sqrt{f}} = \frac{S}{f} + s$,

il che ec.

La porzione di curva, che serve al nostro Problema si è la AIC. essendo $HK = \hat{u}^2$, $HI = s$, avremo, stante la equazione $a^2 - s = u^2$, $IK = u^2$, ed in IK, in conseguenza si rappresenterà il quadrato della velocità ~~orizzontale~~ o sia la forza orizzontale, che risiede nel mobile giunto che sia in I. Ma quando si suppone avanzato sino al punto C, allora sarà $s = BC = a^2$

$u^2 = 0$ ed essendosi dal progetto perduta tutta la forza orizzontale seguiterà esso il suo viaggio per la verticale CL, la quale tocca la Parabola nel punto C, come è facile a dimostrarsi.

Notisi di vantaggio essere la linea $CH = \frac{S}{f}$ uguale al quadrato del tempo impiegato dal mobile a discendere da A in D. e può a norma di una delle superiori equazioni $\frac{\sqrt{S}}{\sqrt{f}} = T$.

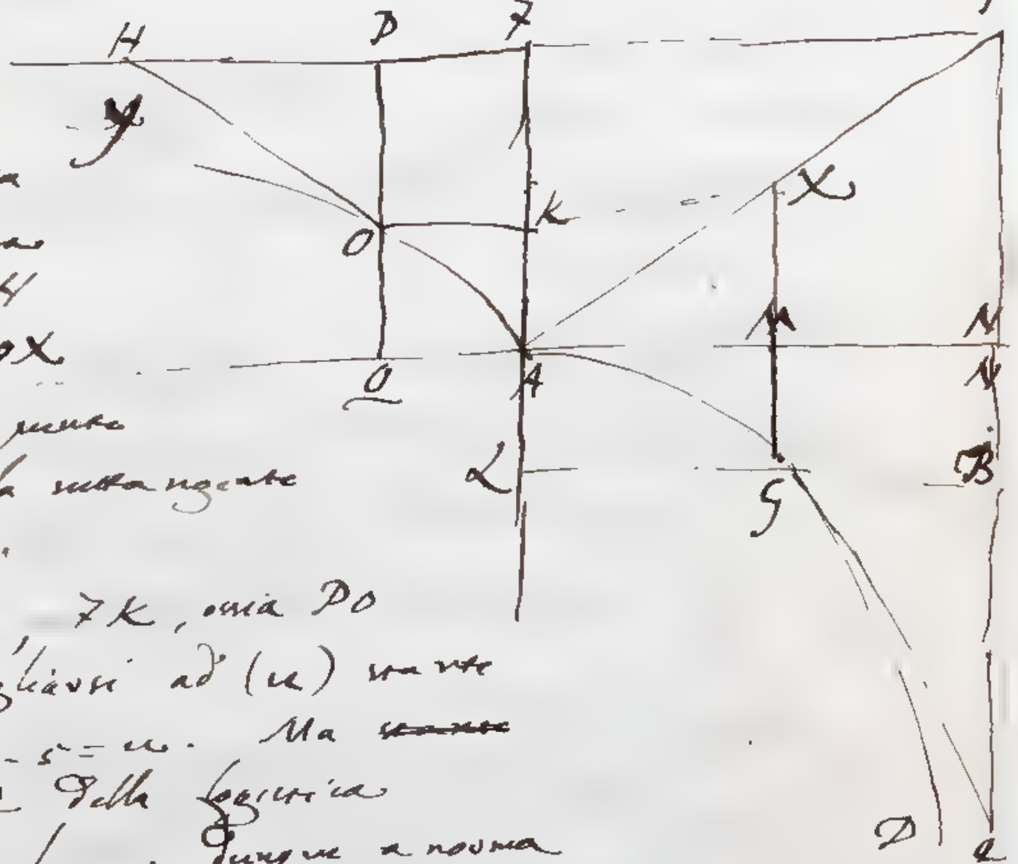
Ma $\frac{\sqrt{S}}{\sqrt{f}} = a - \sqrt{a^2 - s} = a - u$; dunque CH oltre il quadrato del tempo esprimerà pure il quadrato della velocità orizzontale perduta dal mobile nel punto I.

Si imprimano al Mobile A le due velocità a, b per le direzioni AZ, AN, che formino angolo retto, e cammini esso mobile per un mezzo che resista in ragione delle attuali velocità; si cerca il viaggio del mobile secondo giusta il metodo Lebniziano.

Separati i due moti, si consideri primieramente il cammino del corpo A per la linea AZ. Sia (a) la velocità iniziale, (s) gli spazj percorsi AK, (t) i tempi impiegati a percorrere i detti spazj, (u) le velocità residue ~~in K~~ uguali alle resistenze operanti in K, avremo per le note formole $-u\,ds = u\,du$, $-u\,dt = du$, ovvero integrando

$a - s = u$, $la - t = lu$, ossia $t = la - lu = l\frac{a}{u}$

Costruzione



Prendasi AZ = a e tirata la normale indefinita ZH, si descriva all'asintoto ZH la logistica AOX che passi per il punto A, e che abbia la sottotangente HP = ~~AZ~~ 1.
Posta AK = s, ZK, ossia PO dovrà eguagliarsi ad (u) stante l'equazione $a - s = u$. Ma per la proprietà della logistica $ZP = l\,PO = lu$; dunque a norma dell'equazione $-t = lu$ ZP ossia $KO = t$.
Le AK pertanto esprimeranno gli spazj, KO i tempi, KZ le velocità residue.

$S = \frac{s\,ds}{1-s}$ facilm.te si vede che l'elemento
ds espresso per s e tessuti funzione.
... del mobile in qual si voglia punto
$= U$, si vede dalla prima formula
$\frac{ds}{...}$ dunque $dt = \frac{ds}{1-s}$ e sostituendo i valori ... $z = s - 1$
$U^2 = 2s^2 - ss$ ... e differenziando
... manovia. Studiamo ... prossimi i valori dz ... dx e dc dei per ...
dU. ma $U = \sqrt{2s^2 - ss}$, e $UdU = 2sds$ ...
$ds = 2sds - ds$
Si vede che il ... è ... e ...
... le velocità, o le ... come ...
... ds è come il ... corrispondono alle due diagonali ...
... nel [illegible] ...
ds ... $dc = UdU$. essendo $f = b$, $h = \frac{\Gamma}{i}$
... quella del [illegible] ...

129
Lami

Soluzione di
due Problemi Meccanici.

Soluzione di due Problemi del Sig. Co. Giordano Riccati.

Problema I.

Dato un arco di cerchio, il cui diametro sia verticale, il qual arco abbia origine dal punto infimo di esso diametro, e diviso ~~in~~ ~~esso~~ per metà, e condotte le due corde, trovare il tempo, in cui da un punto grave si passano le due corde, supposto che nel transito dall'una all'altra non perda velocità.

1. Nel circolo DAAGFD (fig. 1.), il cui diametro DG = 2. sia verticale, dato l'arco GAA, e fattane la divisione in due parti eguali, conduco le corde AA, AG, e cerco il tempo, nel quale da un punto grave si scorrono le corde predette, supposto che nel passaggio dall'una all'altra la velocità non si scemi. Descrivasi la corda AG, che dal raggio CA = 1. sarà divisa per metà in O, e si tirino AQ, AP normali a DG.

Per la proprietà del circolo se GA = z, sarà GP = $\frac{z^2}{2}$, e per conseguenza PA = $= \sqrt{(\overline{GA}^2 - \overline{GP}^2)} = \sqrt{(z^2 - \frac{z^4}{4})}$. ~~Ora per la nota proprietà~~ Ma PA = GO; dunque GA = $2\sqrt{(z^2 - \frac{z^4}{4})}$. Ora per la notata proprietà a GA = $2\sqrt{(z^2 - \frac{z^4}{4})}$ corrisponde GQ = $\frac{\overline{GA}^2}{2} = 2\cdot(z^2 - \frac{z^4}{4})$; dunque PQ = GQ − GP = $2\cdot(z^2 - \frac{z^4}{4}) - \frac{z^2}{2} = \frac{3z^2 - z^4}{2}$.

II. La forza accelleratrice per la direzione AA, supposta la gravità = 1, si eguaglia a $\frac{PQ}{AA} = \frac{3z - z^3}{2}$, e la velocità acquistata dopo scorsa la corda AA = z, si trova eguale a $\sqrt{(2 \cdot QP)} = \sqrt{(3z^2 - z^4)}$. Chiamato t il tempo della discesa per AA, avremo

dunque

dunque $\left(\frac{3q-q^3}{2}\right)\cdot t = \sqrt{(3q^2-q^4)}$, e perciò
$t = \frac{2}{\sqrt{(3-q^2)}}$.

III. Passo a determinare il tempo t' della discesa per la corda $AG = q$ colla forza acceleratrice, si ragguagliarà $\frac{PG}{AG} = \frac{q^2}{2q} = \frac{1}{2}q$, e la velocità acquistata [illegible], scendendo da A in G si prova $=$
$\sqrt{(2\cdot QG)} - \sqrt{(2\cdot QP)} = \sqrt{(4q^2-q^4)} - \sqrt{(3q^2-q^4)}$.
Scopriremo pertanto $\frac{1}{2}q\cdot t' = \sqrt{(4q^2-q^4)} - \sqrt{(3q^2-q^4)}$, e quindi $t' = 2\sqrt{(4-q^2)} - 2\sqrt{(3-q^2)}$.

IV. Il perchè siamo pervenuti alla soluzion del proposto Problema, determinando il tempo della discesa per le due corde AA, AG, cioè $t+t' = \frac{2}{\sqrt{(3-q^2)}} + 2\sqrt{(4-q^2)} - 2\sqrt{(3-q^2)}$.

V. Il valore del tempo $t+t'$ si estende da una quantità data sino all'infinito. Se le corde $AA = AG = q$ sieno minime, ne proviene $t+t' = \frac{2}{\sqrt{3}} + 4 - 2\sqrt{3} = 4 - \frac{4\sqrt{3}}{3} = 1,6905949$; e questo è il più piccolo valore, che possa competere al detto tempo. Ha dimostrato l'Ab. Vincenzo Riccati mio Fratello nello Opuscolo De praecipuis pendulorum circularium, et cycloidalium proprietatibus, che il tempo per una corda minima sta a quello per l'arco come il diametro ad un quadrante di cerchio, ossia prossimamente come $2 : \frac{355}{226} = 1,5707965$. Si inferisca dunque, che nel circolo del raggio $CG = 1$, essendo costantemente $= 2$ il tempo della discesa per qualunque corda AG, il tempo per le corde AA, AG di due semiarchi minimi è maggiore del tempo per l'arco minimo

intero

intero.

Il tempo $t+t'$ ascenderà all'infinito, quando (fig. 2) l'arco ADAEG s'eguagli a $\frac{2}{3}$ dell'intera circonferenza, e sia la corda orizzontale $AB = q = \sqrt{3}$, onde ne risulti $t+t' = \frac{2}{0}$ ... Non potendo in tal ipotesi per AB discendere il punto grave, sarà più espediente il supporre l'arco ADBEG calante dai $\frac{2}{3}$ della circonferenza per una quantità infinitesima, nel qual caso s'impiegherà nella lentissima discesa per AB un tempo infinito.

Problema II

Determinare quell'arco di cerchio, il cui diametro $= 2$ sia verticale, il qual arco abbia origine dal punto infimo di esso diametro, e sia fornito della proprietà, che la sua corda sia passata da un punto grave in egual tempo, che le due corde dei semiarchi, supposto che nel transito dall'una all'altra di queste corde non perda velocità.

VI. Vogliasi che sia $t+t' = 2$ tempo per la corda AG (fig. 1.), onde s'abbia

$\frac{2}{\sqrt{(3-q^2)}} + 2\sqrt{(4-q^2)} - 2\sqrt{(3-q^2)} = 2$, e conseguentemente $\frac{1}{\sqrt{(3-q^2)}} + \sqrt{(4-q^2)} - \sqrt{(3-q^2)} = 1$, e moltiplicando per $\sqrt{(3-q^2)}$, $\sqrt{(12-7q^2+q^4)} - 2 + q^2 = \sqrt{(3-q^2)}$. Liberata questa formola dai radicali, si riduce alla seguente

$q^6 - 6q^4 + 11q^2 - \frac{23}{4} = 0$; e ponendo $q^2 = p$,

$p^3 - 6p^2 + 11p - \frac{23}{4} = 0$ ... Faccio $p = y+2$, ed effettuate le sostituzioni, mi si presenta

$y^3 - y + \frac{1}{4} = 0$, formola a cui compete la

radice

radice $y = \sqrt[3]{(-\frac{1}{4} + \sqrt{(\frac{1}{64} - \frac{1}{27})})} + \sqrt[3]{(-\frac{1}{4} - \sqrt{(\frac{1}{64} - \frac{1}{27})})}$ spettante al caso irreducibile, il cui valore per altro si può trovare col mezzo delle tavole dei seni.

VII. Ci insegna l'Analisi, che chiamato φ un arco di cerchio, il cui raggio $= r$, si verifica l'equazione

$$2\,Cc.\tfrac{1}{3}\varphi = (r^2 Cc.\varphi + r^2\sqrt{-1}\,Sc.\varphi)^{\frac{1}{3}} + (r^2 Cc.\varphi - r^2\sqrt{-1}\,Sc.\varphi)^{\frac{1}{3}}$$

Questa formola è simile alla scritta di sopra. Fatto il paragone si ponga $y = 2\,Cc.\tfrac{1}{3}\varphi$, $-\frac{1}{4} = r^2 Cc.\varphi$, $\sqrt{(\frac{1}{27} - \frac{1}{64})} = r^2 Sc.\varphi$, e ne proverrà $\frac{1}{64} = r^4 (Cc.\varphi)^2$, $\frac{1}{27} - \frac{1}{64} = r^4 (Sc.\varphi)^2$, e per conseguenza $\frac{1}{27} = r^4((Cc.\varphi)^2 + (Sc.\varphi)^2)$: ma $(Cc.\varphi)^2 + (Sc.\varphi)^2 = r^2$; dunque $\frac{1}{27} = r^6$, e finalmente $r = \sqrt{\frac{1}{3}}$. Avremo pertanto $y = 2\,Cc.\tfrac{1}{3}\varphi$; purché il seno retto r sia $= \frac{1}{\sqrt{3}}$, $Cc.\varphi = -\frac{1}{4r^2} = -\frac{3}{4}$, $Sc.\varphi = \frac{\sqrt{(\frac{1}{27} - \frac{1}{64})}}{r^2} = 3\sqrt{(\frac{1}{27} - \frac{1}{64})}$.

VIII. Chiamo φ' l'arco relativo al raggio $= 1$ simile al φ. Facciasi

$1 : \frac{1}{\sqrt{3}} :: Cc.\varphi' : Cc.\varphi = \frac{Cc.\varphi'}{\sqrt{3}}$, e similmente $Sc.\varphi = \frac{Sc.\varphi'}{\sqrt{3}}$. Scoprirassi pertanto

$Cc.\varphi' = -\frac{3\sqrt{3}}{4} = 0{,}6495190\,5$,

$Sc.\varphi' = \sqrt{(1 - \frac{27}{64})} = \frac{1}{8}\sqrt{(37)} = 0{,}7603453\,2$

Il coseno dell'arco di $49°, 29'$ è $= 0{,}6496692$
ed il coseno di $49°, 30'$ è $= 0{,}6494480$
e la loro differenza $= 2212$

Di più $Cc.\varphi' = 0{,}6495191$ cavato da
$Cc.\ 49°, 29' = 0{,}6496692$
1501

per Facciasi $2212 : 1501 :: 60'' : \frac{90060''}{2212}$
$= 40'' + \frac{1560''}{2212}$, e si scoprirà, che all'arco di $49°, 29', 41''$ corrisponde il coseno $= 0{,}6495190\,5\ldots$

IX.

IX. Ma quest' arco, il cui coseno è positivo non serve al Problema, che richiede un arco φ' fornito dal coseno negativo $= -\frac{3\sqrt{3}}{8}$. In oltre esser dee negativo anche $Co.\frac{1}{3}\varphi' = \sqrt{3}.\,Co.\frac{1}{3}\varphi$. E vaglia il vero dalla formola, che si legge al num.^{ro} VI., $p^3 - 6p^2 + 11p - \frac{23}{4} = 0$ impara dover essere $p = q^2$ positivo, e minore dell'unità. Imperciocchè fatto $p = 1$, si trova il positivo maggiore del negativo, e la formola non si annulla. Ma stabilito $p = 1 + x$, ne risulta $1 + 3x + 3x^2 + x^3 - 6 - 12x - 6x^2 + 11 + 11x - \frac{23}{4} = \frac{1}{4} + 2x - 3x^2 + x^3 = 0$, che assegnato alla x il competente valore, si agguaglia a nulla. Ora se $p = y + 2 < 1$, ha necessariamente y negativa da superar l'unità. Il perchè $Co.\frac{1}{3}\varphi = \frac{Co.\frac{1}{3}\varphi'}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2}y$ esser dee quantità negativa.

X. Per ottener ciò al compimento al semicircolo dell'arco $49^\circ, 29', 41''$, cioè a dire all'arco $130^\circ, 30', 19''$ si aggiunga l'intera circonferenza, di modo che sia $\varphi' = 490^\circ, 30', 19''$, ed $\frac{1}{3}\varphi' = 163^\circ, 30', 6''$ che superando il quadrante si appropria un seno negativo. Il compimento al semicircolo di quest arco è di $16^\circ, 29', 54''$, a cui compete lo stesso coseno, ma positivo. Si osservi nelle Tavole $Co.16^\circ, 29' = 0,9589023$

$Co.16^\circ, 30' = 0,9588197$

e la loro differenza $= 826$

Sia $60'' : 54'' :: 826 : \frac{44604}{60} = 743$, numero, che dee sottrarsi da $0,9589023$, onde si abbia $Co.16^\circ, 29', 54'' = 0,9588280$ e però $Co.163^\circ, 30', 6'' = -0,9588280$

XI. Si alzi il coseno al quadrato, e ne proverrà $(Co.\frac{1}{3}\varphi)^2 = 0,91935113354400$.

e dividendo per 3, $\left(\frac{Cc.\frac{1}{3}q}{3}\right)^2 = (Cc.\frac{1}{3}q)^2 =$ 0,3064503728613, ed estratta la radice, $Cc.\frac{1}{3}q = -0,5535796$, e quindi $2\,Cc.\frac{1}{3}q = y = -1,1071592$: e poichè per num.^ro VI. $p = q^2 = y + 2$, avremo $p = q^2 = 0,8928408$, e finalmente $q = 0,9449020$ sin. AG.

XII. La metà $= 0,4724513$ della corda AG si agguaglia al seno della metà dell'arco AG, giacchè quarta parte dell'arco A.E.A'.G. Dalle tavole raccolgo

Sc. $28^\circ, 12' = 0,4725506$

Sc. $28^\circ, 11' = 0,4722944$

Differenza $= 2564$

La differenza fra $0,4724513$

e $0,4722944$

si trova eguale 1569

Faccio $2564 : 1569 :: 60'' : \frac{94140''}{2564} = 36'' + \frac{1436''}{2564}$. Sarà dunque l'arco

$AEA'G = 112^\circ, 46', 27''$.

XIII. Si renderà manifesta l'aggiustatezza della mia soluzione sostituendo nella formola del num.^o XV. $t + t' = \frac{2}{\sqrt{(3-q^2)}} + 2\sqrt{(4-q^2)} - 2\sqrt{(3-q^2)}$ in cambio di q^2 lo scoperto valore $= 0,8928408$, dimodochè si abbia $t + t' = \frac{2}{\sqrt{(2,1071592)}} + 2\sqrt{(3,1071592)} - 2\sqrt{(2,1071592)}$. e poichè $\frac{2}{\sqrt{(2,1071592)}} = 1,3777840$, $2\sqrt{(3,1071592)} = 3,5254232$, $2\sqrt{(2,1071592)} = 2,9032114$, troveremo $t + t' = 2,0000004$, cioè a dire adequatamente $= 2$, siccome il proposto Problema richiede.

XIV.

XIV. Oltrechè è impossibile il ridurre generalmente a forma algebraica le equazioni del terzo grado spettantisi al caso irreducibile, perchè dipendono dai coseni circolari, che sono quantità trascendenti; riuscirebbe una tal riduzione anche inutile, potendosi col mezzo dei detti coseni determinare i valori delle radici con quella stessa approssimazione, che spesso parimente dee usarsi nelle equazioni algebraiche. Il Problema, che ho scelto, mette in prossima vista la verità della mia asserzione.

XV. La soluzione aritmetica del proposto Problema non si può ottenere, salvo che per approssimazione. Sembrami, che quella che ho dato sia ridotta alla maggiore semplicità, di cui è capace + Nella formola (num.ro VI.) $y^3 - y + \frac{1}{4} = 0$ faccio $y^2 = x$, ed eseguita la sostituzione trovo $xy - y + \frac{1}{4} = 0$, e perciò $(1-x)\cdot y = \frac{1}{4}$. All'asse FH, (fig. 3) col parametro FU = 1 descrivo la parabola conica KN'N''FLN, in cui posta FM'' = x, sarà M''N'' = y. Tirata pel punto O la retta KOI parallela ad N''M'', fra gli assintoti KI, HF delineo i due rami di iperbola N'N'', NQ corrispondenti alla equazione $(1-x)\cdot y = \frac{1}{4}$, onde ad OM'' = 1−x si riferisca M''N'' = y. Le due curve si tagliano in tre punti N'', N', N, e determinano altrettanti valori di y, due positivi M''N'', M'N', ed uno negativo MN, che serve alla soluzion del problema, avendo provato al num.ro IX., che la y esser dee negativa. Segnata MP = r, ed essendo MN = y, e pel num.ro VI. p = y+r, scopriremo PN = p. Taglio FG = PN = p, e condotta l'ordinata GB alla parabola, ed essendosi stabilito al num.ro XI. $p = q^2$, ne risulta

+ Si scioglierà esattamente il Problema col mezzo della costruzione geometrica.

GB

GB = q. Nella Fig. 1. si adattino al circolo descritto col raggio CG = r. le due corde GA, BA ognuna = q, e l'arco A.B.G. sarà quello, che si cerca.

21

Dissertazioni, e scritti
Idrostatici.

élle compressioni dell'aria

B

I. Tutti i Fisici convengono, che per lo meno nelle minime compressioni le densità dell'aria siano proporzionali ai pesi comprimenti. Prendo per mano la formola da me nello Schediasma I. determinata: $b\,dl = \frac{\overline{L-l}\cdot dp}{h\cdot\frac{L}{L-l}+\overline{P+p}}$, da cui vengono espresse le compressioni d'una colonna di qualsivoglia fluido rinchiusa dentro di un tubo. La colonna, la cui lunghezza L, fa equilibrio col peso P, ed h ci è la rigidità naturale corrispondente alla lunghezza L. Dinota $L-l$ la lunghezza della colonna, quando il peso si eguaglia a $P+p$, ed $h\cdot\frac{L}{L-l}$ contrassegna la rigidità naturale conveniente alla lunghezza della colonna $L-l$.

II. Il coefficiente b può essere o eguale alla unità, o pure maggiore, o minore della stessa. Principio dalla prima ipotesi, e fatto $b=1$ cerco se nell'aria priva di naturale rigidità possa mai verificarsi, che le densità siano proporzionali ai pesi comprimenti. La formola $dl = \frac{\overline{L-l}\cdot dp}{h\cdot\frac{L}{L-l}+\overline{P+p}}$ si riduce alla seguente

$$\frac{hL\,dl}{L-l} = \overline{L-l}\cdot dp + \overline{P+p}\cdot -dl$$, e integrando,

$$hL\log\frac{L}{L-l} + A = \overline{L-l}\cdot\overline{P+p}$$. Determino la costante A riflettendo, che quando $p=0$, è parimente $l=0$, e però $A = LP - hL\log 1$, e ponendo $\log 1 = 0$, $A = LP$. Avremo dunque $LP + hL\log\frac{L}{L-l} = \overline{L-l}\cdot\overline{P+p}$. Se le densità sono proporzionali ai loro comprimenti, deve verificarsi l'equazione $LP = \overline{L-l}\cdot\overline{P+p}$, e quindi resta, $b=1$, non si adempie una tal proporzione, se non mentre sia $h=0$, e l'aria sia priva di naturale rigidità.

III. Vediamo cosa succeda nella ipotesi delle grandezze l, e p minime, cioè a dire nelle minime compressioni. Abbiamo in tale circostanza $\frac{L}{L-l} = 1 + \frac{l}{L}$; dunque sostituendo, $LP + hL\log\overline{1+\frac{l}{L}} = \overline{L-l}\cdot\overline{P+p}$. Nella integrazione

integrazione si è supposto $\log. 1 = 0$. Da ciò ne segue, che nella logistica della suttangente $= 1$, in cui si sono presi i logaritmi, è $\log. 1 + \frac{1}{L} = \frac{1}{L}$, e perciò

$$LP + hl = \overline{L-1} \cdot \overline{P+p} = LP + Lp - Pl - pl,$$ o sia

$hl = Lp - Pl - pl$. Ma quando le densità sono come i pesi comprimenti, l'omogeneo di comparazione deve essere $= 0$, ed il termine hl, posta la rigidità infinita, non è trascurabile relativamente ai termini Lp, Pl; dunque posta l'infinita, le densità dell'aria, mentre sia $b = 1$, non sono proporzionali ai pesi comprimenti né pur nelle minime compressioni.

IV. Si cavi un'altra conseguenza, che se l'aria è priva di rigidità naturale, le densità non serbano la ragione dei pesi comprimenti, se non quando è $b = 1$, come si può facilmente raccogliere dalla formola $bdl = \frac{\overline{L-1} \cdot dp}{P+p}$, che solamente facendo $b = 1$, ci dà $LP = \overline{L-1} \cdot \overline{P+p}$, come richiede la legge tante volte nominata delle densità proporzionali ai pesi comprimenti.

V. Vengo ora alla supposizione di b maggiore, o minore della unità. Se vi fosse un fluido privo di qualunque naturale rigidità, abbiamo veduto, che si dee porre $b = 1$, onde si adempia la formola $LP = \overline{L-1} \cdot \overline{P+p}$, e le densità si riguardino nella ragione dei pesi comprimenti. Acquisti esso fluido rigidità naturale, ed alla lunghezza L della colonna di un tal fluido egualmente densa, come quando era $h = 0$, corrisponda il peso nP. Se le densità hanno da stare come i pesi comprimenti, deve verificarsi l'equazione

$$nPL = \overline{L-1} \cdot \overline{nP + np}.$$

Prendo a considerare la formola differenziale

$$bdl = \frac{\overline{L-1} \cdot ndp}{\frac{hL}{L-1} + nP + np},$$ che si riduce alla seguente

$\frac{bhL\,dl}{L-l} = \overline{L-l}\cdot n\,dp + \overline{nP+np}\cdot -b\,dl$. Moltiplico dell'i termini per $\overline{L-l}^{\,b-1}$, onde ci si presenti

$$-bhL\cdot\overline{L-l}^{\,b-2}\cdot -dl = \overline{L-l}^{\,b}\cdot n\,dp + \overline{nP+np}\cdot b\overline{L-l}^{\,b-1}\cdot -dl,$$

e integrando, $A - \frac{bhL\cdot\overline{L-l}^{\,b-1}}{b-1} = \overline{L-l}^{\,b}\cdot\overline{nP+np}$. Ritroverassi il valore della costante A riflettendo, che a $p=0$ corrisponde $l=0$. Sarà per tanto

$A = \frac{bhL^{b}}{b-1} + L^{b}\cdot nP$, e ne risulterà l'integrazione completa $L^{b}nP + \frac{bhL^{b}}{b-1} - \frac{bhL\cdot\overline{L-l}^{\,b-1}}{b-1} = \overline{L-l}^{\,b}\cdot\overline{nP+np}$.

Mentre sia $L^{b}nP + \frac{bhL^{b}}{b-1} = 0$, o sia $nP = -\frac{bh}{b-1}$, da cui si deduce $b = \frac{nP}{nP+h}$, ritroveremo

$nPL\cdot\overline{L-l}^{\,b-1} = \overline{L-l}^{\,b}\cdot\overline{nP+np}$, ovvero $nPL = \overline{L-l}\cdot\overline{nP+np}$, formola risultata alla legge delle densità proporzionale ai pesi comprimenti, la quale si osserverebbe, quando fosse il coefficiente $b = \frac{nP}{nP+h}$, e ciò quantunque il fluido fosse dotato di naturale rigidità.

VI. Se si diano due colonne d'aria una più calda dell'altra, egli è fuor di dubbio, che in ciascuna colonna, mentre almeno si tratti di piccole compressioni, le densità seguono la proporzione dei pesi comprimenti. Nelle due colonne meno calda, e più calda, che in pari lunghezza sussistono egualmente dense, alla lunghezza l corrispondano i pesi nP, NP, e le rigidità h, H, e si dovranno osservare le equazioni $b = \frac{nP}{nP+h}$, $b = \frac{NP}{NP+H}$.

Ora per me si afferma, che relativamente ad ambedue le colonne il coefficiente b deve avere lo stesso valore, se altrimenti fosse, ravvicinate insieme le minime inegualità

minime compressioni dl dell'una, e dell'altra corda
di aria, non si corrisponderebbero nella ragione composta
da me altrove dimostrata, diretta delle lunghezze delle corde,
e dei pesi nei... alle compressioni operanti, ed inversa
della somma della rigidità naturale, e dei pesi compri=
menti. Si osserverà, che il coefficiente b abbia un
valore costante, o supponendo la rigidità h, H eguale
a nulla, onde ci si torni a rappresentare l'ipotesi in prima
luogo considerata di $b = 1$, oppure mettendo $h = mnP$,
$H = mNP$, di modo che le rigidità [illegible] h, H si ri=
proporzionino ai pesi nP, NP nella proporzione costante
di $m : 1$, ed a b compete l'invariabile valore
$\frac{1}{1+m}$. In sì fatta guisa quella rigidità, che si finge
naturale, si tramuta in artificiale, dipendendo intera=
mente dai peso nP, NP, e svanendo del tutto, tolta
di mezzo ogni compressione. Non così interviene nelle
corde solide dotate di rigidità naturale, la quale sus=
siste nelle corde non istirate da peso alcuno.

VII Per iscoprire a chiaro lume, che effettivamente il calcolo
ci guida alla prima ipotesi di $h = 0$, e di $b = 1$,
poniamoci sotto gli occhi la formola differenziale

$$b\,dl = \frac{\overline{L-l}\,.\,nd\wp}{\frac{hL}{L-l} + nP + n\wp}$$

e giacchè le densità devono
essere proporzionali ai pesi comprimenti, nel primo
si ponga in cambio di $\frac{L}{L-l}$ l'eguale valore $\frac{nP+n\wp}{nP}$,

onde si abbia $$b\,dl = \frac{\overline{L-l}\,.\,nd\wp}{\frac{h}{nP}\,.\,\overline{nP+n\wp} + nP+n\wp} = \frac{\overline{L-l}\,.\,nd\wp}{\frac{h+nP}{nP}\,.\,\overline{nP+n\wp}} =$$

$$\frac{\frac{nP}{h+nP}\,.\,\overline{L-l}\,.\,nd\wp}{nP+n\wp}.$$ Ma $\frac{nP}{h+nP} = b$; dunque

$$b\,dl = \frac{b\,.\,\overline{L-l}\,.\,nd\wp}{nP+n\wp},$$ e finalmente $$dl = \frac{\overline{L-l}\,.\,nd\wp}{nP+n\wp}.$$

formola adattata alla supposizione di $h = c$, e di $6 = 1$.
Quanto nella equazione $6dl = \frac{L-l \cdot n\delta\beta}{\frac{hL}{L-l} + n\delta + n\rho}$ cala l'ome=
genéo di comparazione a motivo della rigidità h malamente
introdotta, altrettanto egli è di uopo scemare il coeffi=
ciente 6, acciocchè aggiuntate le parole, la rigidità
sostanzialmente sparisca, e ci si presenti la formola
$dl = \frac{L-l \cdot n\delta\beta}{n\delta + n\rho}$, in cui la menoma compressione
dl si eguaglia all' ~~prodotto~~ del infinitesimo peso $n\delta\beta$,
che la produce, moltiplicato per la lunghezza $L-l$,
e diviso per il peso comprimente $n\delta + n\rho$. La
legge adunque, che si verifica nell' aria, che le sue
densità seguitono la proporzione dei pesi comprimenti,
dipende dalla proprietà, che il fluido stesso sia privo
di rigidità naturale, in maniera che la ripugnanza
ad una ulterior compressione dal peso comprimente
tragga soltanto l'origine, e ad esso ~~[illegible]~~ esquisitamente si
eguagli.

VIII. Se ci saranno due colonne di aria differentemente calde si
osserverà in ciascuna la legge delle densità proporzionali
ai pesi comprimenti: ma, passando dall' una all' altra colon=
na, si muterà proporzione, e se nella meno calda il peso
$n\delta$ corrisponde ad una data densità, si equilibrerà nella
più calda colla stessa densità il peso maggiore $N\delta$.

IX. Nè vale il opporre, che l'esperienze non danno esattamente
la densità dell' aria proporzionale ai pesi comprimenti;
imperciocchè ciò dipende dalle resistenze, che negli espe=
rimenti hanno luogo, dalle particole eterogenee miste nell'
aria, dal calore ~~dell'~~ spec. aria, che durante l'esperienza si può
cangiare, e da qualchè altro elemento, che presentemente
non io in niuno si minutamente considerare.

B

B

B

Spiegazione di
una esperienza.

Spiegare l'ondeggiamento, che scorgesi nelle superficie contigue di due masse, una di olio, e l'altra di acqua poste nello stesso vaso appeso ad un filo, e messe in oscillazione, mentre la superficie superiore dell'olio apparisce quieta e conserva sempre lo stesso sito nel vaso, durante in esso la libera oscillazione.

Io credo che la spiegazione di questo fenomeno osservato dal Sig. Franklin dipenda da tre elementi, cioè dalla comunicazione del moto dalle pareti del vaso al fluido, dalla proprietà diversa dell'olio e dell'acqua ~~di essere più leggiero in ispecie~~, e dalla forza centrifuga.

Ad un vaso cilindrico (Fig. 1.) ABCD si imprima moto da A verso C, ed accadrà che la semiparete verticale del vaso dalla parte di B comunichi il moto all'acqua EBCH ~~contenuta nel vaso, e la comunichi~~ gradatamente. Mentre il vaso ha scorso lo spazietto orizzontale Bb, si sia il movimento comunicato sino in GI, e ne seguirà, che sendo l'acqua incapace di sensibile compressione l'acqua EBbe venga detrusa, e passi ad occupare lo spazio FEG. Dovendosi in oltre concepire l'acqua in HC distaccata per lo spazio minimo Cc dalla parete hc, la sua superficie nella vicinanza di H calerà abbasso a cagione di riempiere lo spazio vuoto HCch. Dalla cosa detta deducesi, che compiuta la comunicazione del moto, ~~deve la superficie dell'acqua~~ adattarsi al piano inclinato KL, essendosi alzata dalla parte di K, ed abbassata dalla parte di L.

Siano ora infusi (Fig. 2.) nel vaso cilindrico ABCD l'acqua FACG, e l'olio EFGH. Movendosi lo stesso vaso da A verso C, si scaccierà di luogo l'acqua FAbf, e l'olio EFfe. Passerà una quantità di olio uguale ad EFfe a riempiere lo spazio HGgh; perchè sendo l'olio

compabile

costipabile, seguirà in esso la costipazione per uno lo spazio Ff, e dalla pressione orizzontale, che indi ne nascerà, verrà costretto ad occupare lo spazio HGgh. È cagionato ciò dallo essere l'olio comprimibile, siccome ho detto, onde si ottenga agevolmente il divisato effetto, e dall'essere assai viscoso, di modo che con molto stento verrebbe spinto in alto pel tratto F E, e percorrerebbe poscia lo spazio E h g.

Lo stesso non addiviene nell'acqua, che non soffre sensibile costipazione, ed è fornita di scarsissima viscosità. L'acqua F A b f vien effettivamente spinta in alto, e dovendo star sotto l'olio, scorre al di sotto di questo, e si trasferisce per la strada F g e a riempiere lo spazio G C e g. Dura tal moto sintantochè il vaso oscilla da A verso C. Ma quando reciprocando ritorna da C verso A, è cacciata all'insù l'acqua G C e g, la quale con movimento contrario passa ad occupare lo spazio F A b f. Ecco dunque in qual guisa nasce l'ondeggiamento isocrono alle oscillazioni del vaso osservate dal Franklin.

Abbiamo veduto qualmente la superficie superiore dell'olio conservi sempre lo stesso sito nel vaso, che si move orizzontalmente. Accade il medesimo anche quando oscillando è inclinato all'orizzonte, a cagione della forza centrifuga. Insegna l'esperienza, che non si versa l'acqua contenuta in un vaso, mentre questo si fa circolarmente girare per un piano verticale con tale velocità, che la forza centrifuga superi la gravità.

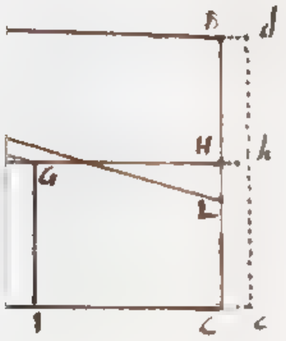


Fig. 1.

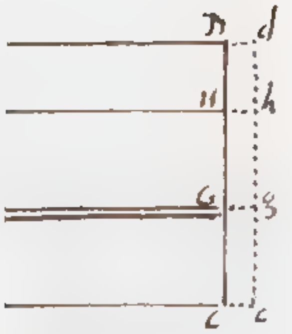


Fig. 2.

23

[illegible]

Annotazione del Sig.r Co. Giordano Riccati
allo Schediasma XXXI. sopra le Leggi delle
resistenze, con le quali i mezzi fluidi ri-
tardano il moto dei corpi solidi del Sig.r
Co. Jacopo Riccati suo Padre contenuto
nel Tomo III. delle opere dello stesso
pag. 376.

Annotazione del Signor Conte Giordano Riccati allo Schediasma XXXI. Sopra le leggi delle resistenze, con le quali i mezzi fluidi ritardano il moto dei corpi solidi del Signor Conte Jacopo Riccati suo Padre contenuto nel Tomo III. dell' Opere dello stesso pag. 326.

Quanto fornita di eleganza è la costruzione del Co. Jacopo mio Padre della formola $-ydy + abudy = udu$ (A); altrettanto sarebbe desiderabile, che si estendesse ai tre casi, che compongono il Problema Determinare nella Cicloide il moto di un Pendolo, a cui si resista dal mezzo in ragione delle velocità, cioè quando il coefficiente b, che ha luogo nella espressione della resistenza abu, è minore della unità, quando ad essa si agguaglia, e quando della stessa è maggiore. Per vero dire la lodata costruzione si adatta perfettamente al terzo caso, ma non così agli altri due. Avendo l' Autore stabilita l' equazione $mm = 2bm - 1$, mi somministra questa il valore $m = b \pm \sqrt{(bb-1)}$, il quale è immaginario, posto b minore della unità. In tale circostanza adunque le due equazioni di mio Padre

$$(\alpha)\quad \frac{mp}{mm-1} - \frac{p^{mm}}{c^{mm-1}\cdot(m^{mm+1} - m^{mm})} = y$$

$$(\gamma)\quad \frac{p}{mm-1} - \frac{p^{mm}}{c^{mm-1}\cdot(m^{mm+1} - m^{mm-1})} = u$$

prendono l' aspetto di immaginarie, e ricusando di lasciarsi costruire, c' insegnano, che fa di uopo ricorrere ad altro metodo.

Che se la quantità b pareggia l' unità, allora si trova $m = 1$, e le due equazioni si trasformano così
$(\varepsilon)\ \frac{p}{0} - \frac{p}{0} = y$, $(\gamma)\ \frac{p}{0} - \frac{p}{0} = u$. Il divisore $= 0$ mi addita, che nelle nostre formole c' entrano i logaritmi, e che bisogna battere una strada diversa.

Presa a maneggiare la formola (A) $-ydy + abudy = udu$ con un metodo di sua invenzione, usa il Co. Jacopo la sostituzione

u,

L' Annotazione, che si legge dopo il mentovato Schediasma XXXI. molto diversa dalla presente, è stata scritta dall' Ab. Co. Vincenzo Riccati figlio anch' egli del Co. Jacopo.

$u = my - p$, e supponendo poscia $mm = 2bm - 1$, dopo le convenienti operazioni perviene alla equazione differenziale (C.) $pdy - mmydp = -mpdp$. Posta $m = 1$, avremo $pdy - ydp = -pdp$, e dividendo per pp, $\frac{pdy - ydp}{pp} = -\frac{dp}{p}$, ed integrando non ommessa la costante, (G.) $\frac{y}{p} = g - lp$ nella logistica della sottotoccante $= 1$.

Per fissare il valore della costante si osservi, che nel principio della discesa, supponendosi la velocità nulla, l'arco della cicloide $= y$ s'agguaglia ad una costante c, e nello stesso caso si raccoglie dall'equazione assunta $u = y - p$, che diviene anche $p = c$. Se dunque nella formola (G) in cambio di y, p si sostituirà il loro valore c, sarà $g = 1 + lc$. Posto nella equazione (G) in vece di g il ritrovato valore, avremo $\frac{y}{p} = 1 + lc - lp$, e moltiplicando per p, e supponendo che all'unità ci corrisponda il logaritmo nullo, (H) $p + pl\frac{c}{p} = y$. Se in luogo di y si collocherà il suo valore $p + u$, ne risulterà (I.) $pl\frac{c}{p} = u$.

Costruzione della formola $pl\frac{c}{p} = u$.

All'asse AD (Fig. 1.) colla sottotoccante $= 1$ si descriva la logistica AC, e ad essa si accomodi l'ordinata AB $= 1$. Nella stessa linea continuata se occorre si segni AG $= c$, e per i due punti B, G si tirino le indefinite BK, GE parallele ad AD. Stabilita arbitrariamente l'assissa AD, alzo l'ordinata DC alla logaritmica, e menata la diagonale AC, prolungandola se fa di uopo, taglierà essa la linea GE nel punto F. Per questo passi FI parallela a GA, e congiunti con una linea i punti A, K, e menata pel punto L, in cui s'incrocicchiano le linee AK, FI, la retta LM parallela ad AD; dico essere AI $=$ ML $= u$, IL $=$ AM $= p$, ed il punto L apparteneva alla curva cercata.

Dimostrazione.

Per la formola (I) se l'assissa AD della logistica si chiami $\frac{u}{p}$, sarà l'ordinata DC $= \frac{c}{p}$. La similitudine dei triangoli CDA, FIA mi suggerisce l'analogia

DC : AD :: IF : AI

$\frac{c}{p} : \frac{u}{p} :: c : u$, la quale mi insegna essere AI $=$ ML $= u$.

Dalla somiglianza poi dei triangoli KDA, LIA si deduca

AD

$AD : DK :: AI : IL$

$\frac{u}{p} : 1 :: u : p$; e conseguentemente $IL = AM = p$; il che &c.

Quando l'assissa AD della logistica si eguaglia alla sotto=toccante $= 1$, allora la diagonale AC toccherà la detta curva, ed essendo $AD = DK$, sarà parimente $AI = IL$, o sia $u = p$. Una tale circostanza ci dà il massimo valore di u; di modo che la linea IT tocca la curva ALG nel punto L. E veglia il vero, giacchè $u = p$; sarà altresì $2u = p + u$; ma $p + u = y$; dunque $2u = y$, ch'è quanto a dire la resistanza $2u$ eguale alla forza allorforma tangenziale y, nel qual caso la velocità è giunta al massimo; perchè nel proseguimento del moto seguitando a calare lo spazio y da percorrersi, la resistenza supera la forza tangenziale, e la velocità scema.

Segnata qualunque altra assissa, la diagonale taglierà la logaritmica in due punti, uno a destra, e l'altro a sinistra del punto C, e ad essi punti corrisponderanno due ordinate, ciascuna delle quali determinerà lo stesso valore di u convenienza a due diversi valori di p, uno minore, e l'altro maggiore di IL.

Nel cominciamento della discesa, quando $p = c = AG$, si troverà $pl\frac{c}{p} = pl_1 = u$, e poichè $l_1 = 0$, sarà parimente $u = 0$. Nello stesso incontro differenziando la formola $l\frac{c}{p} = \frac{u}{p}$, onde si abbia $-\frac{dp}{p} = \frac{pdu - udp}{pp}$, e mettendo $u = 0$, scopriremo $-dp = du$, espressione, che c'istruisce, che segnata $AP = AG = c$, e condotta la GP, toccherà essa la nostra curva nel punto G.

Mentre $AM = p = 0$, per la natura della logistica l'ordinata $DC = \frac{c}{p} = \frac{c}{0}$ è infinitamente maggiore dell'assissa infinita $AD = \frac{u}{p} = \frac{u}{0}$. Si cavi dunque la conseguenza, che $IT = c$, è immensamente più grande di $AI = ML = u$, la quale velocità perciò si trova eguale a nulla.

Posta $IL = p$ infinitamente picciola, sarà parimente minima $AI = u$, ma però infinitamente maggiore di p. Si deduca questa verità dall'analogia

$AD : DK :: AI : IL$

$\frac{u}{p} : 1 :: u : p$, la quale fa toccar con mano, che siccome

AD

$AD = \frac{u}{p}$ è infinitamente maggiore di $DK = u$, non altrimenti $AK = u$ supera immensamente $IL = p$. Quindi raccogliamo, che la curva ALG tocca la retta AD nel punto A

Costruzione della formola $p + pl\frac{c}{p} = y$

Si tagli $GH = AG = c$, e condotta la diagonale AH, e prodotta indefinitamente LM verso N, si faccia $ON = ML$, ed il punto N apparterrà alla curva, che si vuol descrivere.

Dimostrazione.

Essendo per la costruzione $MO = AM = p$, $ON = ML = u$, ne risulta $MN = p + u$: ma $p + u = y$; dunque $MN = y$, il che &c.

E' facile a dimostrarsi, che menata HQ parallela a GA, viene questa linea toccata dalla curva ANH nel punto H, e che di più la linea AQ è la tangente del punto A. Queste deduzioni le lascio all'industria di chi legge.

Si serve mio Padre di due metodi per separare le variabili nella formola $-ydy + nbudy = udu$. Il secondo, che ora si è per me esaminato, non ci guida alla costruzione salvo che nei casi di $b > 1$, di $b = 1$, restando escluso il terzo caso di $b < 1$; perchè il valore di m si trova immaginario. Il primo metodo va esente da una tal eccezione, ed io valendomi di esso, m'ingegnerò di compiutamente costruire la formola sopra scritta.

Determinare nella Cicloide il moto di un Pendolo, a cui si resista dal mezzo in ragione della velocità, quando il coefficiente b della quantità nbu esprimente la resistenza è minore della unità.

Prendo dal Co. Jacopo il modo di trattare la formola $-ydy + nbudy = udu$, da cui usata la sostituzione $u = yz$, nasce la seguente $-\frac{dy}{y} = \frac{zdz}{1 - nbz + zz}$, e mettendo $b - x = z$, $-\frac{dy}{y} = -\frac{bdx}{1 - bb + xx} + \frac{xdx}{1 - bb + xx}$, o sia $\left(\frac{1 - bb}{b}\right) \cdot \left(-\frac{dy}{y} - \frac{xdx}{1 - bb + xx}\right) = \frac{(1 - bb) \cdot -dx}{1 - bb + xx}$

Per far transito alla integrazione, osservo, che l'integrale della grandezza $\frac{(1 - bb) \cdot dx}{1 - bb + xx}$ è un arco di cerchio, il cui raggio $\sqrt{(1 - bb)}$, e la tangente x, il quale da me esprimerassi nella seguente maniera $A.^o R.^o \sqrt{(1 - bb)}\ T.^e x$. Ciò posto prendendo i

logaritmi

logaritmi nella logistica della sottotangente $\frac{1-bb}{b}$, ed aggiunta la costante h, avremo $h - ly - \frac{1}{2}l(1-bb+xx) = -A^o R^o V(1-bb) T^o x$.

Si determinerà il valore della costante h fatta la considerazione, che nel principio del moto $y = c$, $u = 0$, e conseguentemente a norma delle equazioni $u = yz$, $b - x = z$; $z = 0$, $x = b$. Avremo dunque, sostituendo questi valori nella generale equazione, $h - lc - \frac{1}{2}l1 = A^o R^o V(1-bb) T^o b$, e fingendo per ora, che all'unità ci corrisponda il logaritmo nullo, ne risulterà $h = lc - A^o R^o V(1-bb) T^o b$. Quindi l'equazione compiuta sarà $lc - ly - \frac{1}{2}l(1-bb+xx) = A^o R^o V(1-bb) T^o b - A^o R^o V(1-bb) T^o x$. Avverto che nella supposizione di $l1 = 0$ $\frac{1}{2}l(1-bb+xx) = lV(1-bb+xx)$, e che serbata la medesima condizione, la nostra formola si può esprimere nel modo seguente $-l\frac{yV(1-bb+xx)}{c} = A^o R^o V(1-bb) T^o b - A^o R^o V(1-bb) T^o x$. Cangiata ipotesi, e facendo, come tornerà più in acconcio per la costruzione, che a c corrisponda il logaritmo nullo, ci si presenterà l'equazione $-l\,yV(1-bb+xx) = A^o R^o V(1-bb) T^o b - A^o R^o V(1-bb) T^o x$.

Costruzione.

Col raggio $CA = V(1-bb)$ (fig. 2.) si descriva il circolo PAT, e condotta al punto A la tangente indefinita BAX, si tagli $AB = b$, onde sia la secante $CA = 1$. Si segni ad arbitrio un valore di $x = AD$, il quale quando è positivo non può mai essere maggiore di $AB = b$, massima grandezza di x positiva corrispondente ad $y = c$. Posta $AD = x$, l'equazione $b - x = z$ m'insegna essere $BD = z$. Tirata la secante CD sarà l'arco $TQ = A^o R^o V(1-bb) T^o b - A^o R^o V(1-bb) T^o x$. Si delinei colla sottotangente $\frac{1-bb}{b}$ la logistica SHO (fig. 3.), e adattata ad essa curva l'ordinata $TO = c$, seguisi $TQ = A^o R^o V(1-bb) T^o b - A^o R^o V(1-bb) T^o x$, e dal punto Q alzata l'ordinata QH, si eguaglierà questa ad $yV(1-bb+xx)$. Faccio nella fig. 2. $CG = yV(1-bb+xx)$, e condotta pel punto G la linea GM parallela a DB; dico che MG esprime la velocità u del pendolo, mentre lo spazio da trascorrersi è $= CM = y$, e conseguentemente lo spazio scorso $= ML$, determinata $CL = c$.

Dimostrazione.

Per i triangoli simili CDA, CGM abbiamo

$CD : CG :: CA : CM$

$V(1-bb+xx) : yV(1-bb+xx) :: 1 : y$, analogia, da cui si ricava

CM

$CM = y$. Inoltre la simiglianza dei triangoli CAD, CMG somministra la proporzione

$CA : AD :: CM : MG$

$1 : z :: y : yz$, che mi insegna essere $MG = yz$: ma $yz = u$; dunque $MG = u$, il che &c.

Col descritto metodo si compierà la costruzione della curva HGL, le cui coordinate $CM = y$, $MG = u$. Agevolmente può dimostrarsi essere questa una porzione di spirale logaritmica, che ha il centro in C, e che fa con qualunque ordinata CG un angolo eguale all'angolo CBA.

La velocità u ha un massimo, quando la forza tangenziale y s'eguaglia alla resistenza nbu. In tale circostanza si troverà $y = nbu = nbyz$, e conseguentemente $z = \frac{1}{nb}$, ed $x = b - \frac{1}{nb}$. Questi valori ci serviranno per iscoprire col mezzo della nostra costruzione la grandezza di y, a cui corrisponde la massima velocità $u = \frac{y}{nb}$.

Si determina la velocità $u = CH$ nel punto infimo della cicloide, quando $AD = z = \infty$, nel qual caso è parimente $-x = \infty$. L'arco conveniente alla tangente $-x = \infty$ è il quadrante AP, ed inoltre $\sqrt{(1-bb+xx)} = -x = z$. La formola adunque generale si ridurrà alla seguente particolare $-lyz = -lu = A^{o}R^{o}\sqrt{(1-bb)}T^{e}b + Q^{te}R^{o}\sqrt{(1-bb)}$. Facciasi (Fig. 3.) l'ascissa $7P$ uguale all'arco $7AP$ della Fig. 2., e condotta l'ordinata PS, esprimerà questa la velocità cercata.

<u>Determinare la relazione fra le velocità nel punto infimo della cicloide, ed i varj valori di b, che stiano fra i limiti della unità e del nulla.</u>

S'intende descritta la logaritmica della sottotangente $= 1$, e relativamente ad essa la formola della cercata velocità sarà $-lu = \frac{b}{1-bb} \cdot \left(A^{o}R^{o}\sqrt{(1-bb)}T^{e}b + Q^{te}R^{o}\sqrt{(1-bb)}\right)$. Servirà questa per i casi estremi di $b = 0$, $b = 1$, avendo già insegnato a trovare la velocità u nel punto infimo della cicloide rispettivamente a qualunque valore di b minore della unità, e che serbi con essa una proporzione finita.

Quando $b = 0$, s'annulla l'omogeneo di comparazione, e perciò $-lu = 0$, e conseguentemente $u = 1$; verità, che si sarebbe facilmente dedotta dalla prima equazione $-ydy + nbudy = udu$,

fatta

fatta la resistenza $nbu = 0$.

Per determinare la velocità nell'altro caso di $b = 1$, ci vuole un po più d'industria, mentre s'abbia in animo di ricavarla dalla nostra formola. Si ponga $b = 1 - p$, e sia p quantità infinitamente picciola. In tale ipotesi sarà adequatamente $b = 1$, e poichè $bb = 1 - np + pp$, scopriremo $1 - bb = np$, e quindi l'arco del raggio $\sqrt{(1 - bb)} = \sqrt{np}$, e della tangente $b = 1$ si uguaglierà ad un quadrante del detto circolo, e perciò l'equazione prenderà l'aspetto che segue $-lu = \frac{1}{p} \cdot$ Q.te R.o $\sqrt{np}$. Sia il quadrante del raggio $\sqrt{np}$ eguale a $\sqrt{np}$, e ne risulterà $-lu = l\frac{cc}{u} = \frac{\sqrt{np}}{p} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{p}}$: ma $\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{p}} = \infty$, essendo n grandezza finita, e p infinitamente picciola; dunque $l\frac{cc}{u} = \infty$, e per conseguenza la velocità u minima, ed adequatamente uguale a nulla.

La curva pertanto, le coordinate della quale siano b, u, avrà l'andamento espresso nella Fig. 4. A $b = 0$ corrisponderà $u = c = CL$, ed indi crescendo la b, calerà la velocità u sino a tanto che divenendo $b = 1 = CB$, sarà la velocità $u = 0$.

Determinare nella cicloide il moto di un pendolo, quando il coefficiente b della quantità nbu esprimente la resistenza s'uguaglia all'unità.

La formola generale si riduce alla seguente particolare $-\frac{dy}{y} - \frac{dx}{x} = -\frac{dx}{xx}$, ed integrando, presi i logaritmi nella logistica della sottotangente c, $h - ly - lx = \frac{1}{x}$: ma nel principio del moto $y = c$, $x = 1$; dunque $h = lc + l1 + 1$, e supponendo $l1 = 0$, $h = lc + 1$. Perciò l'equazione compiuta sarà $lc - ly - lx = -l\frac{xy}{c} = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$, e mutata ipotesi, facendo per maggior eleganza della costruzione $lc = 0$, $-lxy = \frac{1-x}{x}$.

Costruzione.

Tirate a squadra (Fig. 5.a) le linee CB, BA ciascuna eguale all'unità, e formato sul lato CL = c il quadrato LaL, e menata la diagonale CAZ; si tagli ad arbitrio AD = x, onde sia BD = z. Per i punti C, D segno l'indefinita CG, ed in essa taglio CO = AD = x, CnB = CB = 1. Alla OB, che suppongo condotta, faccio parallela nBe, e con ciò determino la linea Be. I triangoli simili COB, CnBe mi somministrano l'analogia

CO : CB :: OnB : BC
x : 1 :: 1-x : $\frac{1-x}{x}$, e mi additano il valore di
AC = $\frac{1-x}{x}$. Delineo poscia colla sottotaccante = 1 la logistica HO (Fig. 6.), e adattata ad essa l'ordinata 7O = c, segno 7C = $\frac{1-x}{x}$, ed alzata dal punto C l'ordinata CH, si aguaglia questa ad xy. Facciasi nella Fig. 5. CH = xy, e condotta pel punto H la linea HP parallela a CG, la quale intersecherà la diagonale C7 nel punto P, e descritta PM parallela ad AB; dico che la linea MG rappresenta la velocità u del pendolo, mentre lo spazio da passarsi y = CM.

Dimostrazione.

Le linee parallele BA, MP mi suggeriscono l'analogia
AD : PG :: CB : CM
x : xy :: 1 : y. Inoltre dai triangoli simili CAD, CMG si deduce
CB : AD :: CM : MG
1 : z :: y : zy. Ma yz = u; dunque MG = u, il che &c.

Col metodo spiegato si potrà compiere la costruzione della detta curva CGL, le cui coordinate CM = y, MG = u. Passa questa non solo pel punto L, ma ancora pel punto C, aguagliandosi a nulla la velocità del pendolo e nel principio del moto, quando y = c, e nel punto infimo della cicloide, quando y = o.

Nel cominciamento del moto, essendo z = AD = o, la linea CD cade sopra la CB, il punto M coincide col punto L, e la linea MG = u si trova aguale a nulla.

Suppongasi ora z = AD presso che uguale a BA = 1, di modo che il punto D sia infinitamente prossimo al punto A. In tale circostanza, essendo AD = x = $\frac{1}{\infty}$, la linea AC = $\frac{1-x}{x}$ = ∞ diviene infinita. Ora posta (Fig. 6.) 7C = ∞, l'ordinata CH = xy riesce trascendentemente minima, e per conseguenza di tal misura è nella Fig. 5. la linea CH = xy. Ho detto trascendentemente minima, sapendosi per la natura della logistica, che CH = xy è infinitamente minore di $\frac{1}{7C}$ = $\frac{1}{\infty}$ = x. Ripigliata l'analogia (Fig. 5.)
AD : PG :: CA : CM
x : xy :: 1 : y, agevolmente si scopre, che

siccome

siccome PG è infinitamente minore di AD, così $CM = y$ è immensamente più picciola di $CA = 1$. Quindi a $z = BA = 1$ corrisponderà $CM = y = 0$, $MG = u = 0$; come doveasi dimostrarsi.

La velocità u ha un massimo, quando $y = 2u = 2zy$, e conseguentemente $z = \frac{1}{2}$, ed $x = 1 - z = \frac{1}{2}$. Col mezzo di questi valori si scoprirà, usata la nostra costruzione, la grandezza dell'assissa $CM = y$, alla quale conviene la massima ordinata $MG = u = \frac{y}{2}$.

Determinare nella Cicloide il moto di un Pendolo, quando il coefficiente b della quantità zbu esprimente la resistenza è maggiore della unità.

Giacchè si suppone b maggiore della unità, sarà negativa la quantità $1 - bb$, ed io la stabilisco eguale a $-nn$. L'equazione dunque prende il seguente aspetto $-\frac{dy}{y} - \frac{xdx}{xx - nn} = -\frac{bdx}{xx - nn}$. La frazione $\frac{-bdx}{xx - nn}$ si risolve nelle due $\frac{bdx}{2n \cdot (x + n)} - \frac{bdx}{2n \cdot (x - n)}$, e quindi avremo $-\frac{dy}{y} - \frac{xdx}{xx - nn} = \frac{bdx}{2n \cdot (x + n)} - \frac{bdx}{2n \cdot (x - n)}$. Passando all'integrazione sarà $h - ly - \frac{1}{2}l(xx - nn) = \frac{b}{2n} \cdot (l(x + n) - l(x - n))$ nella logistica della sottotoccante $= 1$.

Determineremo il valore della costante h col riflettere che nel principio del moto $y = c$, $x = b$, $xx - nn = bb - nn = 1$. A norma di ciò sarà $h - lc - \frac{1}{2}l1 = \frac{b}{2n} \cdot (l(b + n) - l(b - n))$, e supponendo $l1 = 0$, $h = lc + \frac{b}{2n} \cdot (l(b + n) - l(b - n))$. Quindi ci si presenterà l'equazione compiuta $lc - ly - l\sqrt{(xx - nn)} = l\frac{c}{y\sqrt{(xx - nn)}} = \frac{b}{2n} \cdot (-l(b + n) + l(b - n) + l(x + n) - l(x - n)) = \frac{b}{2n} \cdot l\frac{(b - n) \cdot (x + n)}{(b + n) \cdot (x - n)}$. Facendo transito alle quantità comuni, scopriremo dopo le debite operazioni

$$\frac{c}{y} = \frac{(b - n)^{\frac{b}{2n}} \cdot (x + n)^{\frac{b}{2n} + \frac{1}{2}}}{(b + n)^{\frac{b}{2n}} \cdot (x - n)^{\frac{b}{2n} - \frac{1}{2}}}.$$

Pongo $(b - n)^{\frac{b}{2n}} \cdot (x + n)^{\frac{b}{2n} + \frac{1}{2}} = p$, $(b + n)^{\frac{b}{2n}} \cdot (x - n)^{\frac{b}{2n} - \frac{1}{2}} = q$, equazioni a due parabole, i cui gradi differiscono per la unità, e adempiuta la sostituzione trovo $\frac{c}{y} = \frac{p}{q}$.

Costruzione.

Condotte a squadra (Fig. 7.), le due linee AL, aAl, che si taglino nel punto C, segno $CQ = CaH = n = \sqrt{(bb - 1)}$, e col

vertice

vertice Q, e coll'asse parallelo a C2L descriverò la parabola QIQ dalla equazione $(b-n)^{\frac{b}{2n}} \cdot (x+n)^{\frac{b}{2n}+\frac{1}{2}} = p$. Delineo poscia col vertice 2H, e coll'asse parallelo a CL la parabola 2HK2L dalla equazione $(b+n)^{\frac{b}{2n}} (x-n)^{\frac{b}{2n}-\frac{1}{2}} = q$. Queste parabole saranno algebraiche, o trascendenti, secondo che gli esponenti $\frac{b}{2n}+\frac{1}{2}$, $\frac{b}{2n}-\frac{1}{2}$ saranno razionali, o irrazionali. Le parabole QIQ volteranno sempre il concavo verso C2L; imperciocchè essendo b maggiore di n, l'esponente $\frac{b}{2n}+\frac{1}{2}$ supera l'unità. Le parabole 2HK2L possono volgere il concavo, o il convesso CL, e fra le concave, e le convesse sta di mezzo la linea retta, quando l'esponente $\frac{b}{2n}-\frac{1}{2}=1$, equazione, da cui si ricava $b = 3n$, e giacchè $bb-1 = nn$, $n = \frac{1}{2\sqrt{2}}$, $b = \frac{3}{2\sqrt{2}}$. Se b sarà più picciola di $\frac{3}{2\sqrt{2}}$, le parabole 2HK2L guarderanno col concavo, come nella figura 3., la linea CL, ed essendo b maggiore di $\frac{3}{2\sqrt{2}}$, succederà che la rimirino col convesso.

Taglio $CA = C2A = b$, e segnate $CO = C2O = x$, onde sia $AO = 2A2O = z$, tiro le due ordinate $OI = p$, $2OK = q$; conduco IN parallela ad AL, KN parallela a 2A2L, e pei punti C, N meno la diagonale CNP. Faccio $C2L = c$, e delineata 2L7 parallela a CL, sia 2L7 tagliata dalla diagonale CNP nel punto P. Da questo calo PM perpendicolare a CL, e determinata $CB = 1$, e la normale $BD = AO = z$, e condotta CDG, che intersechi MP in G; dico essere $CM = y$, $MG = u$.

Dimostrazione.

I triangoli simili CSN, CMP mi somministrano l'analogia

SN : CS :: MP : CM

$p : q :: c : \frac{cq}{p}$: ma $\frac{cq}{p} = y$; dunque $CM = y$. Di più la simiglianza dei triangoli CBD, CMG mi insegna essere CB : BD :: CM : MG

$1 : z :: y : zy$, e perchè $zy = u$, se ne deduce $MG = u$, il che &c.

In sì fatta guisa si ultimerà la costruzione della curva CGL, la cui coordinate $CM = y$, $MG = u$, la quale passa non solamente pel punto L, segnato $CL = c$, ma ancora pel punto C, eguagliandosi a nulla la velocità del pendolo e nel principio del moto, mentre $y = c$, e nel punto più basso della cicloide, mentre $y = 0$.

Nel cominciamento del moto $z = 0$, $x = b = CA = C2A$. Ora in

tale

tale incontro $Ae = p$, ed $ae = q$. In fatti posta $x = b$, troveremo $p = ((b-n)^{\frac{b}{2n}} : (b+n)^{\frac{b}{2n}+\frac{1}{2}} = ((bb-nn)^{\frac{b}{2n}} \cdot (b+n)^{\frac{1}{2}}$; ma $bb-nn = 1$; dunque $p = (b+n)^{\frac{1}{2}}$. Collo stesso metodo troveremo $q = (b-n)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{(b-n)^{\frac{1}{2}}}$. Da $bb-nn = (b+n)\cdot(b-n) = 1$ si ricava $b+n = \frac{1}{b-n}$, e $(b+n)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{(b-n)^{\frac{1}{2}}}$, e perciò $q = \frac{1}{(b-n)^{\frac{1}{2}}} = (b+n)^{\frac{1}{2}} = p$ qualmente dovea provarsi. La nostra costruzione ci addita, che quando $q = p$, $y = c$: ma quando $q = p$, $x = b$, e $z = 0$; dunque in tal caso $u = zy = 0$, come realmente dee stare.

Passo a provare, che quando $y = 0$, è parimente $u = 0$. Sia $x = n = CH = CaH$. In sì fatto incontro nella parabola QIe è finita l'ordinata $HR = p$, e nella parabola $aHKae$ l'ordinata $q = 0$: ma $\frac{cq}{p} = y$; dunque $y = 0$. Inoltre $zy = u$, e ad $y = 0$ corrisponde $z = AH = b-n = b - \sqrt{(bb-1)}$ quantità finita; dunque $u = 0$, come restava da far vedere.

La velocità u ha un massimo, quando $y = 2bu = 2bzy$, e conseguentemente $z = \frac{1}{2b}$, ed $x = b - \frac{1}{2b}$.

Determinare nella cicloide la legge dei tempi, quando la resistenza del mezzo proporzionale alla velocità s'esprime per $2bu$.

Essendo $-\frac{dy}{u} = dt$, posto in cambio di u il suo valore $yz = y\cdot(b-x)$, ne risulta $-\frac{dy}{y} = (b-x)\cdot dt$: ma, come si è di sopra provato, $-\frac{dy}{y} = \frac{(b-x)\cdot -dx}{1-bb+xx}$; dunque $dt = \frac{-dx}{1-bb+xx}$, e ciò generalmente in qualunque ipotesi di b o minore della unità, o ad essa eguale, o della stessa maggiore.

Mentre b sia minore della unità, avremo $(1-bb)\cdot dt = \frac{(1-bb)\cdot -dx}{1-bb+xx}$, e per conseguenza integrando $(1-bb)\cdot t = g - A^o R^o \sqrt{(1-bb)}\, T^e x$. Nel principio del moto $t = 0$, $x = b$, e perciò $g = A^o R^o \sqrt{(1-bb)}\, T^e b$, e l'equazione compiuta $(1-bb)\cdot t = A^o R^o \sqrt{(1-bb)}\, T^e b - A^o R^o \sqrt{(1-bb)}\, T^e x$. L'omogeneo di comparazione s'eguaglia (Fig. 2.) all'arco Te, ed inoltre $1-bb = \overline{CA}^2$, e quindi $t = \frac{Te}{\overline{CA}^2}$. E poichè $Te : \frac{Te}{\overline{CA}^2} :: CA : \frac{1}{CA}$; ne segue, che il tempo t s'eguaglia ad un arco simile al Te, il cui raggio $= \frac{1}{CA}$. Tale

si

si è l'arco IK, il cui raggio $CN = \frac{1}{CA}$ si determina conducendo BN normale a CB. Egli è facile da inferirsi, che qualora il pendolo trascorse lo spazio $LC = c$, è pervenuto al punto infimo della cicloide, dove è fornito della velocità $u = CH$, vi ha impiegato il tempo finito $t = IKNO$.

Quando $b = 1$, l'equazione generale si modifica così. $dt = \frac{-dx}{xx}$, e conseguentemente integrando $t = \frac{1}{x} - 1$. La costante -1 è quella che si deve aggiungere; perchè nel principio del moto, mentre $t = 0$, si trova giustamente $x = 1$. Essendo nella Fig. 5. $AE = \frac{1}{x} - 1 = TE$ della Fig. 6, da queste linee s'esprime il tempo, in cui dal mobile è stato scorso lo spazio LM. Si osservi, che sendo (Fig. 6.) $EH = xy$, e trovandosi nel punto infimo della cicloide $x = y = 0$; ne risulta parimente $xy = 0$. Ora nella logistica HO all'ordinata $EH = 0$ corrisponde l'assissa $TE = t = \infty$, e per conseguenza il pendolo non giungerebbe al sito più basso della cicloide, senon dopo un tempo infinito.

Che se $b > 1$, allora posto $1 - bb = -nn$, ci si presenta l'equazione $dt = \frac{-dx}{xx - nn}$. La frazione $\frac{-dx}{xx - nn}$ si risolve nelle due $\frac{dx}{2n.(x+n)} - \frac{dx}{2n.(x-n)}$, e quindi si scopre $dt = \frac{dx}{2n.(x+n)} - \frac{dx}{2n.(x-n)}$, e integrando, presi i logaritmi nella logistica della sottotangente $\frac{1}{2n}$, $t = l(x+n) - l(x-n) - g$. Ma quando $t = 0$, $x = b$; dunque $g = l(b+n) - l(b-n)$, e perciò $t = l(x+n) - l(x-n) - l(b+n) + l(b-n)$, e supponendo $l1 = 0$, $t = l\left(\frac{(x+n).(b-n)}{(x-n).(b+n)}\right)$, e facendo che a $\frac{b+n}{b-n}$ ci corrisponda il logaritmo nullo, $t = l\left(\frac{x+n}{x-n}\right)$

Costruzione.

Siano (Fig. 8), come nella Fig. 1., $AC = b$, $CH = CQ = n$. Da' punti H, C, Q si tirino normali alla AQ le linee $HB = 1$, $CD = \frac{b+n}{b-n}$, QZ, e pel punto D passi la logistica YD, la cui sottotangente $= \frac{1}{2n}$. Segnata $CO = x$, sarà per conseguenza $OQ = x+n$, $OH = x-n$. Descrivasi per i punti O, B la diagonale OB, la quale tagli la linea QZ nel punto Z. Da questo si tiri ZY parallela a QA, e pel punto Y, in cui viene intersecata la logistica YZ, si meni YX perpendicolare ad AQ: dico che CX esprimerà il tempo, in cui il pendolo ha passato (Fig. 7.) lo spazio LM, ed acquistata la velocità MG.

Dimostrazione

Dimostrazione.

De' triangoli simili (Fig. 4.) OHnB, OQZ abbiamo

OH : HnB :: OQ : QZ

$x-n$: 1 :: $x+n$: $\frac{x+n}{x-n}$, analogia che m'insegna il valore di $QZ = XY = \frac{x+n}{x-n}$. Ma $CX = l.XY$; dunque $CX = l\left(\frac{x+n}{x-n}\right)$, come doveva dimostrarsi.

Egli è da notarsi, che mentre $CO = x = CH = n$, e perciò $HO = o$, la linea $QZ = XY$ diviene infinita, ed infinito parimente si trova il tempo $t = CX$. Ma quando $x = n$, $y = o$; come ho provato di sopra; dunque non si richiede meno d'un tempo infinito, acciocché il pendolo giunga al punto più basso della cicloide.

La soluzione del Problema Determinare nella Cicloide il moto d'un Pendolo, a cui si resista dal mezzo in ragione della velocità ha avuto per oggetto principale l'osservare cosa succederebbe nella data ipotesi di resistenza. Per altro ha dimostrato il Co. Jacopo Riccati mio Padre (Tomo III. Schediasma XXVIII.), che se si muova un corpo attraverso d'un fluido, che scappi prontamente dai lati, la resistenza sarà proporzionale al quadrato della velocità. Lo stesso mio Padre nello Schediasma XXX., in cui tratta del moto dei pendoli a cicloide, posta la resistenza del mezzo in ragione duplicata dell'attuale velocità, stabilisce colla scorta dell'esperienza, che le resistenze dei mezzi fluidi, che fanno contrasto al moto de' pendoli, sono proporzionali per una parte negli archi grandi al quadrato della velocità, e per l'altra in quegli archi minimi, ed ultimi, che stanno di mezzo fra i confini del moto e della quiete, si possono prendere per costanti. Addiviene ciò, secondo il mio parere, perché, formandosi l'intera resistenza dall'aggregato di due, una relativa al quadrato della velocità attuale, e l'altra costante; negli archi grandi la seconda è picciolissima e trascurabile in paragone della prima, e negli archi minimi succede tutto il contrario.

B

BI
N

BI

Problema

Determinare la velocità, colla quale l'acqua, o altro fluido non viscido esce da un foro circolare aperto nel fondo di un vaso cilindrico mentre esso fluido si conserva nel vaso sempre alla medesima altezza.

Determinare la velocità colla quale l'acqua o altro fluido non viscido esce da un foro circolare aperto nel fondo di un vase cilindrico, mentre esso fluido si conserva sempre nel vaso alla stessa altezza.

Pongo mano in una materia trattata dai più insigni Geometri a solo fine di far vedere l'utilità del metodo delle azioni illustrato dal Sig. Vincenzo Riccati mio Fratello nel suo Dialogo delle Forze Vive.

Abbiasi il vaso cilindrico GC, la cui base (n), e la base parimente circolare del foro LM aperto nel fondo (b). Si mantenga l'acqua costantemente all'altezza G C e mentre una quantità di fluido eguale allo strato 7C esce per il foro LM la massa tutta di acqua gC discende ed agisce per lo spazio D7 = ds. Chiamo (u) la velocità dell'acqua gC, ed (U) la velocità dell'acqua pari di mole allo strato 7C nell'atto che trova l'uscita per il buco LM e prende la figura del cilindro NM eguale al cilindro 7C.

L'anzidetta azione del fluido gC, che si esprime per (cn ds) produce il doppio effetto cioè di accrescere la forza viva e nella massa (cn) del fluido gC e nella massa (n ds) del fluido eguale al cilindretto 7C che sortisce per il forame LM. L'acqua (cn) passa dalla velocità (u) alla (u + du) e conseguentemente la sua aumentazione di forza viva si eguaglia a (cn u du). L'accrescimento della forza viva dell'acqua n ds, che fa transito dalla velocità u alla U si espone per $n\,ds \cdot \frac{U^2 - u^2}{2}$. Ecco la formola che si mette sotto degli occhi l'eguaglianza fra l'azione (cn ds) ed il doppio effetto prodotto

$$cn\,ds = cn\,u\,du + n\,ds \cdot \frac{U^2 - u^2}{2}$$

274

Non lascio di avvertire, che la inassegnabile porzione di acqua (n ds) si avanza per gradi minimi dalla velocità (u) alla (U). La natura eseguisce ciò con il seguente artifizio. Termina essa due curve g l L, h m M, ... ai lati delle quali, cioè a dire negli spazi g l L g, h m M H, l'acqua ristagna e non si move ed è come se fosse agghiacciata. Il cilindroide g l L, M m h contiene tanto liquido quanto il cilindro Z C, e questo liquido si va sempre più accelerando a misura che passa per circoli più ristretti fino a LM.

Nella formola $c n ds = c n u du + n ds . \frac{U^2 - u^2}{2}$ sarà nullo il termine (c n u du) quando le velocità (u) (U) siano ridotte equabili, nel qual caso l'azione (c n ds) si impiegherà solamente ad accrescere la forza viva della porzione minima di acqua (n ds) che esce dal vaso ed a far sì che essa passi dalla velocità (u) alla (U). Avremo adunque nella detta ipotesi

$c n ds = n ds . \frac{U^2 - u^2}{2}$ e conseguentemente

$2c = U^2 - u^2$. Si move l'acqua nel sito gh e negli altri siti superiori colla celerità (u), nel sito LM colla celerità (U) ed essendo che per i circoli gh, LM passa nello stesso tempo una pari quantità di liquido, le velocità (u) (U) serbano la ragione inversa dei detti circoli, e si vorrà l'analogia $b : n :: u : U$ da cui deducesi l'equazione $\frac{bU}{n} = u$.

Si sostituisca nella formola $2c = U^2 - u^2$ in vece di (u) il suo valore, e si scoprirà essere $2c = U^2 - \frac{b^2 U^2}{n^2}$ o sia

$\frac{2c n^2}{n^2 - b^2} = U^2$, espressione donde si ricava il valore della velocità divenuta equabile colla quale esce il liquore dal vaso.

Se il foro (b) sarà infinitesimo, si troverà $U = \sqrt{2c}$ cioè la velocità equabile dell'

acqua

acqua che scaturisce fuori del vaso eguale
alla radice della doppia altezza a cui
monta l'acqua nel vaso medesimo.
Osserveremo in progresso che in virtù di una
menomissima azione, ed in tempo impre-
tamente piccolo il fluido giunge ad acqui-
stare la mentovata equabile velocità.
Sembrerà strano che in tutti gli altri casi,
quando cioè il foro (b) e il fondo (n)
si corrispondono in assegnabile propor-
zione, la velocità equabile (u) superi
sempre la quantità $\sqrt{2c}$, e possa ascen-
dere all'infinito nell'incontro che sia
$n = b$. Ma cesserà la meraviglia quando
farò a suo luogo vedere, che alla detta
velocità equabile non si può mai per-
venire, richiedendo essa una azione
infinita ed un tempo infinito. Per ora
considero la circostanza di $n = b$, cioè
a dire che il fondo sia tutto aperto;
egli è chiaro che in tale ipotesi il fluido
si muove colla velocità di un grave ca-
dente, la quale non può considerarsi
siccome equabile se non quando dopo
una immensa azione, ed un immenso
tempo è divenuta infinita. Questa
infinita velocità col seguitar della azione
aumenta in tempo finito per una quantità
finita, ciò che non la priva della vera om-
bra di una adequata equabilità. Men-
tre il foro sia convenientemente piccolo
in relazione al fondo del vaso la velo-
cità equabile $u = \frac{n\sqrt{2c}}{\sqrt{n^2-b^2}}$ si ragguaglia
fisicamente colla grandezza $\sqrt{2c}$. No-
teremo in progresso di una assai piccola
azione l'acqua che esce fuori del vaso
giunge alla celerità $\sqrt{2c}$, dopo di che
mantiene rigorosamente parlando seguita
a ricevere un qualche accrescimento.
Ciò non ostante fisicamente si può consi-
derare come equabile. Se ciò si verifi-
cherebbe quando il fluido nello scorrere
non incontrasse resistenza veruna, egli
è manifesto che le notabili resistenze che

ne incontrano

ne fossero uno il moto saranno sì che la velocità si ridurrà ben presto all'equabile, né giungerà mai, conforme c'insegnano l'esperienze, per quanto il buco sia ristretto, ad eguagliare esattamente la quantità $\sqrt{ax}$.

Torno a prendere per mano la formola generale $cnds = cnudu + nds \cdot \frac{U^2 - u^2}{2}$ ... Fatta la divisione per (n), e sostituiti in cambio di (u^2), e di (udu) gli equivalenti valori $\frac{b^2 U^2}{n^2}$, $\frac{b^2 UdU}{n^2}$, troveremo dopo le debite operazioni

$$ds = \frac{2cb^2 UdU}{2cn^2 - n^2 + b^2 \cdot U^2}$$

Pongo $2cn^2 - n^2 + b^2 \cdot U^2 = g$, onde si abbia differenziando $2UdU = \frac{-dg}{n^2 - b^2}$

Adempiute le opportune sostituzioni ci si presenterà

$$ds = \frac{cb^2}{n^2 - b^2} \cdot \frac{-dg}{g}$$ ed integrando noi ommessa l'adizione della costante

$$s = \frac{cb^2}{n^2 - b^2} \cdot lg - lg = \frac{cb^2}{n^2 - b^2} \cdot lg - l(2cn^2 - n^2 + b^2 \ldots)$$

nella Logaritmica della sottotangente $\frac{cb^2}{n^2 - b^2}$

Per determinare il valore della costante (g) si noti, che nel principio del moto quando $s = 0$ è parimenti $U = 0$. Avremo dunque in tale circostanza

$\frac{cb^2}{n^2 - b^2} \cdot lg - l2cn^2 = 0$; formola dalla quale si deduce il valore della costante $g = 2cn^2$. Quindi l'integrale compiuto della nostra generale equazione sarà

$$s = \frac{cb^2}{n^2 - b^2} \cdot l2cn^2 - l(2cn^2 - n^2 + b^2 \cdot U^2)$$

Alli asse QK, della sottangente $\frac{c b^n}{\overline{n^2-b^2}}$ si costruisca la Logaritmica AMZ. Si accomodino alla nostra curva le due ordinate $BA = acn^n$, $NM = 1$. Il punto N è l'origine dei logaritmi, i quali presi verso NC dalla parte ove le ordinate CZ superano l'unità NM, fanno figura di positivi, e presi verso NC dalla parte ove le ordinate CZ sono più piccole della unità NM, anno figura di negativi. Segnata l'ascissa $BC = s$, sarà l'ordinata $CZ = acn^n - \overline{n^2+b^2} . u^n$. Siccome nella figura la linea $BA = acn^n$ eccederà l'unità ~~nella ... come pure le ordinate ... eccederà~~ l'unità, e l'ordinata CZ sarà della unità della minore, si troverà $s = BC = BN + NC$, cioè a dire lo spazio (s) eguale a BN logaritmo della quantità $AB = acn^n$, più NC logaritmo della quantità $CZ = acn^n - \overline{n^2+b^2} . u^n$ che l'analisi ci fa comparire sotto l'aspetto di negativo. Assunta l'ordinata CZ maggiore della unità scriveremo $s = BC = BN - NC$, vale a dire lo spazio (s) eguale a BN logaritmo della grandezza $AB = acn^n$, meno NC logaritmo della grandezza $CZ = acn^n \overline{n^2+b^2} . u^n$. Se la costante $BA = acn^n$ restasse superata dalla unità ne risulterebbe $s = BC = NC - BN$. Per il punto A conducasi la linea AL parallela ad QK, e prolungata CZ fino in D, chiaramente si vede, che essendo $CD = acn^n$ $CZ = acn^n - \overline{n^2+b^2} . u^n$ ne risulta $ZD = \overline{n^2-b^2} . u^n$. Col parametro $\left(\frac{1}{n^2-b^2}\right)$ alli asse AB si delinei la Parabola apolloniana AHQ, e per il punto Z tirata la retta ZSH parallela ad QK

ad CK, la natura della Parabola AHC
si manifesta, essere GH = u quella velocità
che corrisponde allo spazio GF = BC.
Posta CF = 0 e conseguentemente
BC = s = ∞, troveremo BC = u =
$\frac{n\sqrt{rc}}{\sqrt{n^2-b^2}}$ minore di quella velocità uguale
a cui il fluido che esce dal vaso non può
mai giungere se non dopo una azione in=
finita.

Non sarà inutile il fare alcune riflessioni in=
torno ai due casi estremi cioè quando il
~~fondo~~ foro (b) si eguaglia al fondo (n)
e quando il foro (b) è infinitamente pic=
colo. Mi giova premettere una verità
notissima ai Geometri, che adattate le
due ordinate BA, CF a due Logaritmiche
descritte con sottotangente diversa, le inter=
cette BC sono proporzionali alle sottotangen=
ti. Ma in una Logistica di sottotangente
finita fra due ordinate BA, CF che si ri=
trovano in finita proporzione si tro=
va di mezzo una linea finita BC; dun=
que se la Logistica avrà la sottotangente
infinita, o infinitamente piccola la inter=
cetta BC fra due ordinate corrispondenti
in proporzione finita spetterà a quelli ordini
di infiniti o di infinitesimi, a cui la
sottotangente appartiene.

Per adattare la nostra costruzione al caso di
b = n, suppongasi che (n - b) si eguagli
ad una grandezza infinitamente piccola
di modo che FD = $\sqrt{n^2-b^2}$ sia non un
un vero nulla. Nella presente ipotesi
la sottotangente della Logaritmica $\left(\frac{\sqrt{cb^2}}{n^2-b^2}\right)$

si trova infinitamente grande, e per ciò
per quanto prossime alle egualità siano
le due ordinate BA, CF purchè conservino
fra loro una proporzione finita, chiudono
sempre in mezzo una linea BC infini=
tamente lunga. * Quindi è che la curva AMF
si confonde

* Posta BC infinita ma di grado inferiore
alla sottotangente, le ordinate BA, CF si
accosteranno infinitamente alla egualità.
Quindi la curva AMF si confonderà colla
tangente AK condotta al punto A di essa
curva. Essendo adunque i G... ABK due
triangoli

~~riconfondendosi con una retta e seguentemente parallela a BC, quale si mandi a congiungersi con BC in un punto K, manifestamente formano essendo triangoli ABK e con triangolo, sarà GZ ... AG. Ma nella Parabola AHC, GH è ... √AG; Dunque GH è ... √GZ e ... legge dei gravi cadenti:~~

Passo all'altro caso di $b = \frac{n}{\infty}$, relativamente a cui la sottotangente $\left(\frac{cb^2}{n^2-b^2}\right)$ della Logaritmica AMZ è minima di un grado superiore od inversamente più piccola di (b). Se la regola non ha molto spiegata, presa l'ordinata CZ minima a piacere, ma però finita, sarà ancora BG = GZ = s minima dello stesso ordine di infinitesimi, a cui spetta la sottotangente $\left(\frac{cb^2}{n^2-b^2}\right) = L$; l'ordinata BC della Parabola AHC raggiunge ... della velocità operabile $u = \frac{n\sqrt{ac}}{\sqrt{n^2-b^2}}$, il quale supera con una inassegnabile minimezza la quantità $\sqrt{ac}$: Segnata CZ = BG finitamente minima, ne risulterà GH finitamente eguale a $\sqrt{ac}$. Così la conseguenza che legge, che il fluido che esce dal vaso ~~avrà~~ acquistata la velocità finitamente eguale a $\sqrt{ac}$ ~~per~~ in virtù di una ... azione in uno spazio infinitamente piccolo di (b^2). Se si stabilirà del genere del grado degli infinitamente piccoli, a cui conviene la quantità $(b^{\frac{3}{2}})$ infinitamente maggiore di (b^2), l'ordinata CZ = BG si troverà infinitamente piccola, e la corrispondente velocità GH = u si adeguerà matematicamente

279

triangoli simili, avremo

AB : BK :: AG : GZ

$acn^2 : \frac{cb^2}{n^2-b^2} :: ... : s$

e conseguentemente

$n^2 s = ...$.

Ma nel nostro caso n = b; dunque $as = u^2$, nota legge dei gravi cadenti.

N° 1240

matematicamente con $\sqrt{ac}$. Sia, per esempio $s = \frac{b^{\frac{3}{2}}}{n}$ e durante l'azione menoma $cns = cb^{\frac{3}{2}}$ uscirà dal vaso la quantità di acqua $ns = b^{\frac{3}{2}} = b \cdot b^{\frac{1}{2}}$ o sia un aldrizzato di acqua LO (Fig. 1ma), la cui base (b) è la lunghezza $LN = b^{\frac{1}{2}}$. Scorrendosi dal fluido lo spazio piccolissimo LN con velocità finita, si impiegherà un tempo minimo, e conseguentemente in tempo minimo esso fluido prenderà la velocità $\sqrt{ac}$ ... Acciocchè poi nella velocità GH che si adegua con $\sqrt{ac}$ (Fig. 2da) si accresca l'impercettibile accrescimento CD, si richiede un numero di una azione che si applichi ad uno spazio infinito CK, e che duri un tempo infinito.

2e Dalle cose dette manifestamente si ricava, che quando il foro sarà piccolissimo relativamente al fondo del vase, scaturirà l'acqua colla velocità $\sqrt{ac}$, presa una azione assai piccola, e dopo un brevissimo tempo, che sembrerà un istante agli osservatori più attenti. Ridurrò a compimento questo caso particolare, col far palese più facilmente mediante di quella Logistica, in cui si prendono gli ultimi logaritmi dei numeri. Torno a ripetere l'osservazione, che se alla menzionata Logistica si adatteranno le ordinate $BA = acn^2$, $CZ = acn^2 - n^2 + b^2 \cdot u^2$, la linea intercetta BC = s come chiaro (2) starà a la sottangente (a) della Logaritmica assunta alla sottangente $\left(\frac{cb^2}{n^2 - b^2}\right)$ della Logaritmica AMZ, e per conseguenza si avrà l'equazione $\frac{2cb^2}{a \cdot n^2 - b^2} = s$. La linea BA è data; si renderà pur nota la linea CZ, mentre ad (u) si assegni un determinato valore ... essendo cognita CZ si sa pur nella Logaritmica presa in

sostanza

prossimamente il valore di (z) il quale si eguaglia secondo le regole da me superiormente spiegate o alla somma o alla differenza dei logaritmi di BA, e di C7. Conosciuta la (z) si conoscerà parimente $s = \frac{z \cdot cb7}{a \cdot n^2 - b7}$ quando si sia manifestato il valore della suttangente (a) della Logaritmica assunta. Mi avanzo dunque a scio=gliere il seguente Problema

Determinare
la suttangente di una Logaritmica,
in cui sieno cognite due ordinate
e la porzione di assissa fra loro
intercetta.

Sia AM7 la Logaritmica, di cui si cerca la sottotangente $= a$, BA una delle ordinate date $= g$. Considero per ora l'altra ordinata C7 come variabile, e condotta per il punto 7 la linea 7G parallela all'as=sintoto BK, che tagli l'ordinata BA nel punto G, chiamo $BC = x$ e G? $= y$, onde ne risulti $C7 = g - y$ è noto essere $a : g-y :: dx : dy$; dunque $dx = \frac{a\,dy}{g-y}$. Trasmuto la frazione in una serie, e trovo

$$dx = \frac{a\,dy}{g} + \frac{ay\,dy}{g^2} + \frac{ay^2dy}{g^3} + \frac{ay^3dy}{g^4} + \frac{ay^4dy}{g^5} \; \&c$$

passo all'integrazione senza aggiunta di costante, perchè posto $y = 0$ deve insiememente essere $x = 0$, e mi si presenta

$$x = \frac{ay}{g} + \frac{ay^2}{2g^2} + \frac{ay^3}{3g^3} + \frac{ay^4}{4g^4} + \frac{ay^5}{5g^5} \; \&c$$

formola, da cui si deduce il valore della sottotangente

$$a = \frac{x}{\frac{y}{g} + \frac{y^2}{2g^2} + \frac{y^3}{3g^3} + \frac{y^4}{4g^4} + \frac{y^5}{5g^5} \; \&c}$$

il quale ci si rende noto, essendo date come si suppone le ~~…~~ linee g, x, y. Per far buon uso della serie bisogna procurare, che le due ordinate BA, CP siano quanto è mai possibile vicine alla eguaglianza; perchè quanto AG sarà più piccola per rapporto a BA, tanto più presto la serie convergerà, e si potranno in quel che concerne il fine omettere i termini susseguenti.

[illegible] Logistica che ci somministrano i numeri logaritmi dei numeri, sia $BA = g = 10000$, e per conseguenza $CP = g - y = 9999$, e ritrovata $BC = x$ si $AG = y = 1$ conveniente alla differenza dei logaritmi dei numeri 10000, 9999, e con[…] la troveremo raggiungendola necessariamente $4.34 + \frac{3044}{10000}$. Sostituiti $BC = x = 4.34 + \frac{3044}{10000}$ questi valori nella formula generale, si cangerà essa nella seguente particolare

$$a = \frac{4.34 + \frac{3044}{10000}}{\frac{1}{10000} + \frac{1}{2\cdot 10000^2} + \frac{1}{3\cdot 10000^3} + \frac{1}{4\cdot 10000^4}\ \&c}$$

Nota. Dai computi del[…] calcolo si ricava $a = 0.4342945$

La serie che serve di divisore converge sì giusta sarà ch'egli è inutile il tener conto se non di due termini. Computati adunque due termini si scopre la ricercata sottotangente $a = 4.342827$.

Vogliamo ora applicare il calcolo ad un qualche caso particolare. Sia il foro "6" la centesima parte del fondo (n) cioè $100\,6 = n$ e conseguentemente $10000\,6^2 = n^2$, e venga proposto di cercare, per quale spazio (s) debba seguire l'azione [illegible] onde il fluido che sortirà fuori del vaso acquisti la velocità u. Dalla norma delle stabilite ipotesi troveremo i valori

i valori delle due ordinate $BA = acn^2 = acb^2\ 10000$, $CD = acn^2 - \overline{n^2+b^2}\ cc^2 = acb^2$. Nella Logistica, presa in proporzione la intercetta (z) fra le nostre due ordinate si eguaglia alla intercetta fra le due ordinate che stanno la stessa proporzione di 10000 ad (1). Fatto ricorso alle tavole si scopre

$z = l\ 10000 = 4.0000000$.

Ma conforme si è stabilito superiormente

$\frac{zcb^2}{a \cdot n^2 b^2} = s$; dunque ponendo in cambio di (a) di (n^2) e di (z) i convenienti valori

$$s = \frac{40000000c}{4342482 \cdot 9999} = \frac{40000000c}{43422139\ 9\ 2\ 7\ 173}$$

$= \frac{c}{1085}$ Quindi segue l'uscir per uno spazio minore della millesima parte della altezza (c) a cui si sostiene l'acqua nel vaso, il fluido che esce dal foro centesima parte del fondo è già fornito della velocità $u = \sqrt{ac}$ che un grave acquisterebbe cadendo dalla altezza (c). Se per esempio (c) fosse eguale a un piede o sia a linee 144, ne verrebbe (s) minore della settima parte di una linea. E pure il foro $b = \frac{n}{100}$ non si può dire gran fatto piccolo in relazione al fondo (n). Nelle esperienze rapportate dal dottissimo Sig.r Marchese Poleni nel suo libro De castellis di orifizio minore del presente come per il quale

usciva

usciva l'acqua stava al fondo del vaso come 1 : 5,43

Dopo avere paragonate le velocità dei fluidi usciti dai vasi cogli spazj coi quali segue l'azione, mettiamole un poco al confronto con i tempi che il fluido impiega per acquistarla, e cominciamo a sciogliere il seguente

Problema

Trovare la relazione fra la velocità colla quale l'acqua esce da un foro circolare aperto nel fondo d'un vaso cilindrico, ed il tempo in cui si acquista la detta velocità.

Per passare senza incorrere in paralogismo dalla legge degli spazj sopra rammentata $ds' = \frac{2cb^2 u\,du}{2cn^2 - n^2 + b^2 u^2}$ a quella dei tempi, fa di mestieri conformarsi a quanto ha dimostrato il Sig. Vincenzo Riccati mio fratello nel suo Dialogo, cioè convien sostituire in cambio di (ds') quell'elemento di spazio (dp), che nel tempo (dt) in cui segue l'azione (cioè ds') si scorre colla velocità U. Gli spazj (ds') (dp), che si passano in tempi pari stanno come le velocità (u) (U) colle quali si passano; ma come ho antecedentemente provato $u : U :: b : n$; dunque $ds' : dp :: b : n$, e per conseguenza $ds' = \frac{b\,dp}{n}$. Fatta la sostituzione

nella

nella formola sovrapposta avremo

$$\frac{b\,dp}{n} = \frac{2cb^2\,u\,du}{2cn^2 - n^2 + b^2 u^2} \quad \text{ossia}$$

$$dp = \frac{2cnb\,u\,du}{2cn^2 - n^2 + b^2 u^2}$$

Ma $dp = u\,dz$; perchè (dp) è quello spazio che si scorre colla velocità (u) nel tempo (dz); dunque sostituendo e dividendo per (u)

$$dz = \frac{2cnb\,du}{2cn^2 - n^2 + b^2 u^2}$$

Dunque il valore del quadrato della velocità equabile da noi antecedentemente scoperto $\frac{2cn^2}{n^2-b^2} = g^2$

e conseguentemente $n^2 - b^2 = \frac{2cn^2}{g^2}$

Nell'ultima formola in cambio di (n^2-b^2) si colloco la quantità eguale $\left(\frac{2cn^2}{g^2}\right)$, e dividendo per (cn) e riducendo allo stesso denominatore, trovo

$$dz = \frac{gb}{2n} \cdot \frac{2g\,du}{g^2 - u^2}$$

la frazione $\frac{2g\,du}{g^2-u^2}$ si eguaglia alla somma delle due $\frac{du}{g+u} + \frac{du}{g-u}$

e quindi sarà

$$dz = \frac{gb}{2n} \cdot \left(\frac{du}{g+u} + \frac{du}{g-u}\right)$$

ed integrando niuna aggiungere

la

* nella seguente riga della sottangente g^b, e invece della unità si ridatti il seguente nella.

la costante, poiché ommessa una tale addizione posto $z = 0$ si trova come si doveva $u = 0$

$$z = \frac{g^b}{m} \cdot l\,\overline{g+u} - l\,\overline{g-u} = \frac{g^b}{m}\, l\,\frac{g+u}{g-u}$$

Stabilisco finalmente $\frac{g+u}{g-u} = r$ onde si abbia dopo eseguita la sostituzione

$$z = \frac{g^b}{m} \cdot l\,r$$

Costruzione

Costruiscono primieramente la formula $\frac{g+u}{g-u} = r$; che con i noti metodi si riduce a quella che segue

$2g = \overline{g-u} \cdot \overline{r+1}$ appartenente alla Iperbola tra gli asintoti. (Fig. 3)

Fra gli asintoti AM, AD descrivo l'Iperbola $\sim$ IHK, in cui i rettangoli tra le ascisse e le corrispondenti ordinate si eguaglino alla quantità data $(2g)$. Seguita la ascissa $AC = r+1$, sarà l'ordinata $CH = g-u$. Si prenda $AE = g = \sqrt{\frac{2cn^2}{n^2-b^2}}$, e condotta per il punto E la linea ES parallela ad AD, manifestamente si scorge che essendo $CS = g$, $CH = g-u$, ne risulta $SH = u$. Inoltre giacché $AC = r+1$, sottratta $EI = 1$, resterà $IS = r$.

Noto primieramente che il rettangolo costante $(2g)$ richiede, che ad $AE = g$ corrisponda

corrisponde $CD = x$. Ma $CD = 1$. Dunque anche $ZD = 1$. Seguita pertanto che all'assissa $v = ZD = 1$ si trova la velocità $u = 0$.

Noto in secondo luogo che mentre l'assissa $ZG = v$ si prende infinita si scoprirà la velocità $GH = GC = g = \sqrt{\frac{2en^2}{n^2 b^2}}$, come diventata equabile, e giunta a quella massima a cui metafisicamente parlando non può pervenire se non dopo un'azione infinita.

Passo alla costruzione della formola $t = \frac{g}{?} \cdot lv$. All'intento

OK delineo la Logistica DZL, fig. 4ta che abbia la sottotangente $\left(\frac{gb}{2n}\right)$. Adatto ad essa l'ordinata $CD = 1$, ed assunta l'assissa $CG = z$ segnerà la corrispondente ordinata $GZ = v$. Osservo che posta $CG = z = 0$ si trova $GZ = CD = v = 1$, a cui nella premessa equazione corrisponde rettamente $u = 0$. Prolungata la linea DC, segno $CA = g$ e per il punto A meno AL parallela ad CK. Descrivo poscia la curva CHO colla legge, che essendo l'ordinata $GZ = v$ della Logistica eguale alla $ZG = v$ della figura terza, sia parimente $GH = u$ nella presente figura eguale a $GH = u$ della figura terza. Quì è manifesto che la linea AC servirà di assintoto

alla

alla nostra curva, imperocchè sola=
mente quando $GT = v$. e per conseguen=
za anche $CG = z$ sono infinite,
$GH = u$ s'eguaglia a $GB \;(= g$
$= \sqrt{\frac{2cn^2}{n^2-b^2}}$, conforme abbiamo ri=
cavato dalla considerazione della
terza teoria.

Ecco anche qui alcune riflessioni intor=
no ai due casi estremi, vale a dire quan=
do il foro (b) ed il fondo (n) s'egua=
gliano, e quando il foro (b) è infini=
tamente piccolo.

Principiando dalla prima ipotesi dico, che
in una Logaritmica di suttangente
data in quanto s'accostino alla egua=
lità due ordinate CD, KL (fig. 4.ta)
in modo che sia finita la loro differenza
NL, prenderanno sempre in mezzo
una intercetta finita CK. Che
se la suttangente sarà infinita, la
intercetta CK competerà allo stesso
genere di infiniti. Quindi, presa CG
finita, o anche infinitamente grande
ri'guardo inferiore ad CK, la dif=
ferenza $MT = vr$ fra le due ordinate
CD, GT si troverà essere infinite-
sima, o, perciò, tutto il pezzo di curva
DT si confonderà colla tangente
DO condotta al punto D della Loga=
ritmica DTL. La suttangente
CO che generalmente pareggiasi
a $\frac{gb}{2n} = \frac{b}{2n}\sqrt{\frac{2cn^2}{n^2-b^2}}$, quando sia
$b = n$ la troveremo eguale ad
$\frac{1}{2}g = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2cn^2}{0}}$ ch'è quanto dire
trascendentemente infinita. Avremo

dunque

Dunque in tal caso a norma delle cose detto

$OC : CD :: DM : MZ$

$\frac{z}{g} : z :: z : V-z$

analogia da cui si deduce

$\frac{z^2}{g} = V-z$.

Si rivolga posteriormente alla parabola $?HK$ (fig. 3) in quale sino a punto che $IG = V-z$ è minima infinitamente si confonde colla tangente IN condotta al punto I di essa curva. Si sa che nella parabola la suttangente si uguaglia alle ascisse, e per questa ragione sarà $BN = AB = z$. Avremo ottenuto

$\frac{g}{2} : BN :: SH : GI$

$\frac{g}{2} : z :: u : V-z$

e conseguentemente

$\frac{zu}{g} = V-z$. Ma abbiamo ottenuto ancora $\frac{z^2}{g} = V-z$;

Dunque $\frac{z^2}{g} = \frac{zu}{g}$ e sia

$z = u$ nota velocità fra i tempi e le velocità, mentre i gravi cadono liberamente.

Da facile è la considerazione della seconda ipotesi, che si finge il seno (6) infinitamente piccolo. In effetto incontrare la secante $OC = \frac{gb}{rn} = \frac{b}{rn}\sqrt{\frac{rcn^2}{nn-bn}} = \frac{b}{rn}\sqrt{rc}$ ($h^2 ...$) è infinitamente piccola dello stesso grado

quello del foro (b). Ora grande, e minore quanto si voglia finita la ordinata GI, l'ascissa CG = z apparisce anch'essa [illegible] all'ordine medesimo di superiorità. Si segue z.K = z minima ma infinitamente maggiore di CG come sarebbe a dire proporzionale a l'b, e vi corrisponderà la ordinata KL = v infinita. Ma nella Iperbola HK (Fig.ª 3ª) posta IG − v infinita si trova $GH = u = GC = g - \sqrt{\frac{acn^2}{n^2 - bb}}$ $= \sqrt{ac}$; Dunque dopo un tempo minimo il fluido che esce dal foro inassegnabile (b) avrà acquistata la velocità $u = \sqrt{ac}$ siccome se un grave che liberamente fosse disceso dall'altezza (c).

Portando la considerazione dal minimo matematico al minimo fisico, egli è chiaro, che uscendo l'acqua da un buco fisicamente piccolo, prenderà, prescindendo dalle resistenze, alla velocità $\sqrt{ac}$ in tempo fisicamente minimo. Metto a conguaglio come sopra il caso, in cui sia 100 b = n, e cerco in qual tempo il fluido conseguisca la velocità $u = \sqrt{ac}$. Nella Logistica in cui corrispondono i Logaritmi cioè nella predetta

Lo 'numeri' novo [illegible] $\int \frac{g+u}{g-u}$ ......

riscontro ~~[illegible]~~ il $\int \frac{\sqrt{\frac{ac \cdot 10000}{9999}} + \sqrt{ac}}{\sqrt{\frac{ac \cdot 10000}{9999}} - \sqrt{ac}}$

$= \int 39999 = 4.6020492.$

~~$= [illegible]$~~

quantità che ci somministra il valore della ascissa (z) nella predetta Logaritmica

logaritmica corrispondente ad ordinata $g + \sqrt{rc}$ si trova a norma $g - \sqrt{rc}$
delle avvertenze superiormente fatte, come la suttangente a 434294 alla aggiunta $z = 46020492$ della logistica in cui si assumono i logaritmi dei numeri con la suttangente $\frac{gb}{2n} = \frac{1}{200}\sqrt{rc}\cdot\frac{10000}{9999}$
$= \sqrt{\frac{c}{19998}}$ alla ascissa (z) della logaritmica 972 (ps 4ta) riuscente a lunga vittima. Dalla stessa analogia si ricava

$$z = \frac{46020492\sqrt{\frac{c}{19998}}}{4342627} = \frac{46020492\sqrt{c}}{614140478}$$

$$\frac{\sqrt{c}}{\frac{24}{43}\sqrt{\ldots\frac{24}{43}}} = \frac{\sqrt{c}}{13 + \frac{15432402}{46020492}} = \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{178}}$$

si ridurrà il tempo (z) a parti di secondo, assumendo dalle esperienze che un grave in un minuto secondo scorre oncie del piede real di Parigi 181. Faremo adunque

$$\sqrt{362} : 1 :: \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{178}} : z$$

e ne risulterà posta come sopra di un piede o sia di oncie (12) la altezza (c) a cui si sostenta la acqua nei vasi

$$z = \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{362\cdot 178}} = \frac{\sqrt{12}}{64436} = \frac{1}{73}$$

vorrà dire il tempo ricercato eguale
alla settantesima terza parte di un
secondo, minuzia che al senso sembra
un istante;

B

下 [illegible]

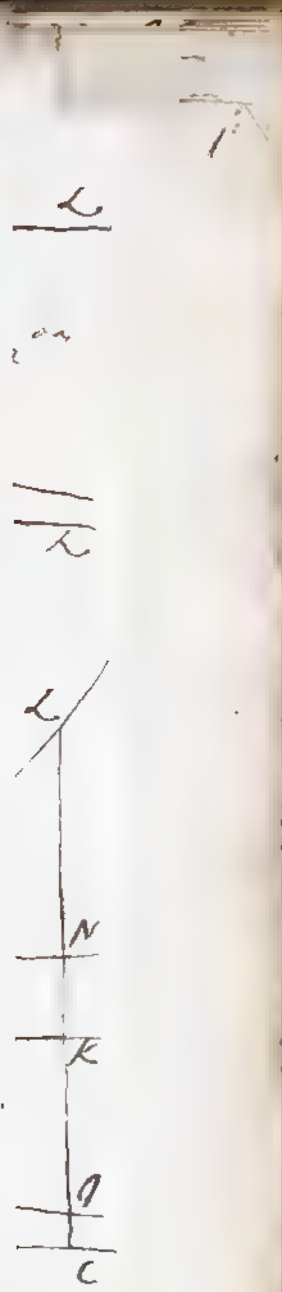
B

十八

B

下人

B

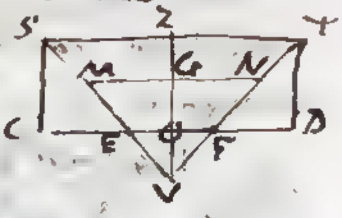

L
N
K
C

BI
N

Determinare la forza viva dell'acqua contenuta del gorgo, la cui figura sia un frusto Conico

a dal P. Massimo Valletti.

Determinare la forza viva dell' acqua contenuta nel gorgo, la cui figura sia un frusto conico.



Siano le sezioni $ST = b$, $MN = y$, $EF = c$, e la linea $ZV = g$. Dovendo per la proprietà del cono conservarsi l'ana= logia $b : g^2 :: c : \frac{cg^2}{b}$, scopriremo $OV = \frac{g\sqrt{c}}{\sqrt{b}}$, e quindi $ZO = g - \frac{g\sqrt{c}}{\sqrt{b}} = g\cdot\left(\frac{\sqrt{b}-\sqrt{c}}{\sqrt{b}}\right)$.

Posta la sezione $MN = y$, e la retta $ZG = x$, si avrà $GV = g - x$, e dall' analogia $g^2 : b :: (g-x)^2 : y$ ricaveremo l'equazione $y = \frac{b(g-x)^2}{g^2}$.

Nella formula generale $\frac{c^2u^2}{2}\int\frac{dx}{y}$ sostituito il valore di y ne proverrà la forza viva dell' acqua contenuta nel gorgo $= \frac{c^2u^2}{2}\int\frac{g^2 dx}{b\cdot(g-x)^2} = \frac{c^2u^2}{2}\cdot\left(\frac{g^2}{b\cdot(g-x)} - A\right)$. Si deter= mina la costante A riflettendo, che quando $ZG = x = 0$, è parimente nulla la forza viva, che si cerca. Per la qual cosa sarà $A = \frac{g}{b}$. Scopriremo pertanto la forza viva dell' acqua $SMNT = \frac{u^2}{2}\left(\frac{c^2g^2}{b\cdot(g-x)} - \frac{c^2g}{b}\right)$, e quando $x = ZO = g - \frac{g\sqrt{c}}{\sqrt{b}}$, ne risulterà la forza viva di tutta l'acqua $SEFT$ contenuta nel gorgo $= \frac{u^2}{2}\left(\frac{c^2g^2\sqrt{b}}{bg\sqrt{c}} - \frac{c^2g}{b}\right) = \frac{u^2}{2}\left(\frac{cg\sqrt{bc} - c^2g}{b}\right) = \frac{u^2}{2}\cdot\frac{gc\sqrt{c}}{\sqrt{b}}$, trascurando il secondo termine infinitamente minore del primo.

Dalla Lettera dei 26. Gennajo 1765. diretta al Sig. Ab. Contarelli si raccoglie, che supposta la figura del nostro gorgo dee verificarsi la formola $\frac{\sqrt{4\varepsilon a b^3 s}}{\sqrt{(fbc^2 - bsc^2 + b^3 s} + gbc\sqrt{bc}} = u$

Se $b^3 s$ benchè quantità minima, sia infinita relati= vamente agli altri termini del denominatore, il che succederà

succederà, quando esempigrazia s si riferisca in data ragione col diametro del foro c.

Surrogato cz in vece di bs, troveremo dividendo per c

$$\frac{\sqrt{4eab^2z}}{\sqrt{(fbc - c^2z + b^2z + bg\sqrt{bc})}} = u.$$

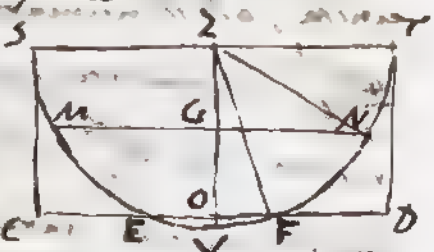
Non si avrà dunque $\sqrt{4ea} = u$, senon qualora non solamente $fbc - c^2z$, ma pur anche $bg\sqrt{bc}$ siano minimi in riguardo a b^2z. Ciò può succedere, quantunque sia finita l'altezza $zo = g - \frac{g\sqrt{c}}{\sqrt{b}}$. Si ponga per esempio $z = \sqrt[4]{c}$, e ne proverrà

$$\frac{\sqrt{4eab^2\sqrt[4]{c}}}{\sqrt{(fbc - c^2\sqrt[4]{c} + b^2\sqrt[4]{c} + bg\sqrt{bc})}} = u,$$

formola, in cui svaniscono i termini $fbc - c^2\sqrt[4]{c} + bg\sqrt{bc}$ paragonati con $b^2\sqrt[4]{c}$, e ne risulta $\sqrt{4ea} = u$. Ritroverassi altresì $\sqrt{4ea} = u$ supponendo $f = 0$, onde il gorgo occupi tutto il vaso.

Queste riflessioni dimostrano, che la figura di un frusto conico è migliore di quella da me determinata nell'Annotazione allo Schediasma XXXVI contenuto nel Tomo III delle Opere del Co. Jacopo mio Padre.

Determinare la forza viva dell'acqua contenuta nel gorgo, la cui figura sia una porzione di semisfera



Siene $ZT = g$, $GN = p$, $OE = q$, $ZV = g$, $ZG = x$, e le sezioni circolari $ST = b = ng^2$; $MN = y = np^2$, $EF = c = nq^2$. Per la proprietà del circolo $g^2 - x^2 = p^2$: ma $p^2 = \frac{y}{n}$; dunque $g^2 - x^2 = \frac{y}{n}$, e quindi $n(g^2 - x^2) = y$.

Nella formula generale $\frac{c^2u^2}{2}\int\frac{dx}{y}$, esprimente la forza viva dell'acqua contenuta nella porzione SMNT del gorgo si ponga in cambio di y lo scoperto valore, e ne proverrà $\frac{c^2u^2}{2n}\int\frac{dx}{g^2-x^2}$ $= \frac{c^2}{2ng}\cdot\frac{u^2}{2}\int\left(\frac{dx}{g+x}+\frac{dx}{g-x}\right) = \frac{c^2}{2ng}\cdot\frac{u^2}{2}\cdot\log.\frac{g+x}{g-x}$. Non c'è bisogno di aggiunger costante, perché supponendosi $\log. 1 = 0$, quando nel sito ST la assissa $ZG = x = 0$, ne risulta la forza viva $\frac{c^2}{2ng}\cdot\frac{u^2}{2}\cdot\log. 1 = 0$.

Posta $x = ZO = \sqrt{g^2 - q^2}$, scopriremo la forza viva dell'intero gorgo $= \frac{c^2}{2ng}\cdot\frac{u^2}{2}\cdot\log.\frac{g+\sqrt{g^2-q^2}}{g-\sqrt{g^2-q^2}}$; ma essendo q minima $\sqrt{g^2-q^2} = g - \frac{q^2}{2g}$; dunque la predetta forza viva $= \frac{c^2}{2ng}\cdot\frac{u^2}{2}\cdot\log.\frac{4g^2}{q^2} =$ $\frac{c^2}{2ng}\cdot\frac{u^2}{2}\cdot\log.\frac{4b}{c}$. Ora il logaritmo di un numero infinito $\frac{4b}{c}$ è immensamente minore di esso numero. Provo in primo luogo, che è infini=

218

ramente minore di $\frac{4b^{\frac{1}{2}}}{c^{\frac{1}{2}}}$. Imperciocchè presa fra la unità, ed il numero $\frac{4b}{c}$ la media proporzionale $\frac{4b^{\frac{1}{2}}}{c^{\frac{1}{2}}}$, a questo numero corrisponderebbe il logaritmo $\frac{1}{2}.\frac{4b^{\frac{1}{2}}}{c^{\frac{1}{2}}}$, il quale contro la natura delle logaritmiche sarebbe, come il numero, infinito dello stesso grado. Dimostro in secondo luogo che log. $\frac{4b}{c}$ è più piccolo infinitamente di $\frac{4b^{\frac{1}{4}}}{c^{\frac{1}{4}}}$. Si prendano fra 1, e $\frac{4b}{c}$ tre medie continue proporzionali $\frac{4b^{\frac{1}{4}}}{c^{\frac{1}{4}}}$, $\frac{4b^{\frac{1}{2}}}{c^{\frac{1}{2}}}$, $\frac{4b^{\frac{3}{4}}}{c^{\frac{3}{4}}}$. A tali numeri dovrebbero adattarsi i logaritmi, e perciò

$\frac{1}{4}.\frac{4b^{\frac{1}{4}}}{c^{\frac{1}{4}}}$, $\frac{1}{2}.\frac{4b^{\frac{1}{4}}}{c^{\frac{1}{4}}}$, $\frac{3}{4}.\frac{4b^{\frac{1}{4}}}{c^{\frac{1}{4}}}$

il numero infinito $\frac{4b^{\frac{1}{4}}}{c^{\frac{1}{4}}}$, ed il logaritmo corrispondente $\frac{1}{4}.\frac{4b^{\frac{1}{4}}}{c^{\frac{1}{4}}}$ spetterebbero ad un infinito dello stesso grado, il che si oppone alla natura della logistica. Collo stesso artificio proverò essere log. $\frac{4b}{c}$ minore di $\frac{4b^{\frac{1}{5}}}{c^{\frac{1}{5}}}$, di $\frac{4b^{\frac{1}{6}}}{c^{\frac{1}{6}}}$ &c.

Mi pongo sotto gli occhi le due formole relative ad s, ed a z esprimenti la velocità, colla quale l'acqua scaturisce dal foro c.

$$\frac{\sqrt{4ab^3s}}{\sqrt{(fbc^2-bsc^2+b^3s+\frac{a^2c}{pn^2}\log.\frac{4b}{c})}}=u$$

$$\frac{\sqrt{4a\,fn^2z}}{\sqrt{(fbc-c^2-fn^2+\frac{n^2bc}{2n^2}\log.\frac{4b}{c})}}=u$$

Fingasi log. $\frac{4b}{c}=\frac{4b^{\frac{1}{6}}}{c^{\frac{1}{6}}}$ benchè questo valore sia

sia infinitamente maggiore del vero, nulladimeno sostituita nella due formole prendono esse il seguente aspetto

$$\frac{\sqrt{4\varepsilon a b^3 s}}{\sqrt{(fbc^2 - bsc^2 + b^3 s - \frac{mbc^{n} \cdot 4b^n}{nng})}} = u$$

$$\frac{\sqrt{4\varepsilon a b^n z}}{\sqrt{(fbc - cz + b^n z - \frac{mbc^{n} \cdot 4b^n}{nng})}} = u$$

e fanno vedere, che posta $s = \frac{c^n}{b}$, o $z = c^{\frac{1}{n}}$, nei denominatori spariscono gli altri termini a confronto di $b^3 s$, $b^n z$, onde si abbia $\sqrt{4\varepsilon a} = u$, la qual velocità competente ad un grave, che scende dall'altezza a, si acquista scorrendo uno spazio infinitesimo $z = c^{\frac{1}{n}}$ in minimo tempo.

Ne nascerebbe la stessa conseguenza anche quando SMEFNT fosse la figura del vaso, che l'altezza finita del gorgo non impedisca che la velocità $= \sqrt{4\varepsilon a}$ si quadagni in tempo infinitesimo scorrendo uno spazio minimo.

Si rifletta inoltre, ritenute le altre denominazioni, si ponga $ZT = y$, e per la natura di tal curva si avrà $\frac{v^2}{g^2}\sqrt{(g^n - x^n)} = y$, e quindi la forza viva dell'acqua contenuta nella porzione di gorgo SMNT $= \frac{mx^n}{g} = \frac{mc^n u^n}{n\pi} \int \frac{dx}{\frac{v^2}{g^2}\sqrt{g^n - x^n}} = \frac{g^n c^n u^n}{n v^n} \int \frac{dx}{\sqrt{g^n - x^n}} =$

$= \frac{ngc^2}{2ng^2} \cdot \frac{u^2}{2} \log. \frac{g+x}{g-x}$ ~~posto~~ $x = 2O = \frac{g}{v}\sqrt{v^2-g^2}$, ~~sa~~

averemo la forza viva dell'intero gorgo $=$

$\frac{ngc^2}{2ng^2} \cdot \frac{u^2}{2} \cdot \log. \left(\frac{g + \frac{g}{v}\sqrt{v^2-g^2}}{g - \frac{g}{v}\sqrt{v^2-g^2}} \right)$ e esimendo adequatamente

le indicate radici scopriremo $\log. \left(\frac{g + \frac{g}{v}\sqrt{v^2-g^2}}{g-\frac{g}{v}\sqrt{v^2-g^2}} \right) =$

$\log. \frac{4v^2}{g^2} = \log. \frac{4b}{c}$. Ci si presenteranno adunque

le formole

$$\frac{\sqrt{4eab^3s}}{\sqrt{(fbc^2 - bsc^2 + b^3s + \frac{nnc^2}{2ng^2} \cdot \log. \frac{4b}{c}}} = u$$

$$\frac{\sqrt{4eab^2z}}{\sqrt{(fbc - c^2z + b^2z + \frac{nnbc}{2ng^2} \log. \frac{4b}{c}}} = u$$

dalle quali si caveranno le stesse conseguenze come nel circolo. ~~[illegible]~~

Aggiungo una riflessione, che ~~[illegible]~~ ammessa la figura da me determinata nella citata Annotazione, è necessario che $2V = g$ sia minima, acciocchè l'acqua che spiccia fuori del vaso acquisti in tempo minimo la velocità $u = \sqrt{4ea}$. Al contrario se la figura è circolare, o ellittica, non nuoce che $2V = g$ sia quantità finita, onde $\frac{nnc}{2ng^2} \cdot \log. \frac{4bc}{}$ sia quantità infinitesima, benchè b^2z possa essere infinitamente maggiore

Paragoniamo la forza viva dell'acqua nel gorgo, sotto che le stesse si adatta o alla figura determinata nell'Annotazione, o ad un frusto conico, o ad un circolo, o ad un ellissa. Metto qui in serie le predette

forza

forze vive $\frac{2}{3}cg\cdot\frac{u^2}{2}$, $\frac{gc\sqrt{c}}{\sqrt{b}}\cdot\frac{u^2}{2}$, $\frac{gc^2}{2ng}\cdot\log\frac{4b}{c}\cdot\frac{u^2}{2}$, $\frac{gc^2}{2ng}\cdot\log\frac{4b}{c}\cdot\frac{u^2}{2}$. Avendo dimostrato $\log\frac{4b}{c} <$ $\frac{4b^{\frac{1}{n}}}{c^{\frac{1}{n}}}$, fingasi che sia eguale, e proverranno le dette forze vive $\frac{2}{3}cg\cdot\frac{u^2}{2}$, $\frac{gc\sqrt{c}}{\sqrt{b}}\cdot\frac{u^2}{2}$, $\frac{gc}{2ng}^{\frac{4}{n}}\cdot 4b^{\frac{1}{n}}\cdot\frac{u^2}{2}$, $\frac{gc}{2ng}^{\frac{4}{n}}\cdot 4b^{\frac{1}{n}}\cdot\frac{u^2}{2}$ &c.

Supposta minima soltanto il fosse c, la prima forza viva sarà infinitamente maggiore della seconda, e questa della terza, e della quarta. Acciocchè divenga $u=\sqrt{4ga}$ egli è necessario, che nel primo caso sia $z=\infty$. Nel secondo basta che sia $z=\sqrt[3]{c}$, e nel terzo, e nel quarto che sia $z=\sqrt{c}$.

Determinare la forza viva dell'acqua contenuta nel gorgo, la cui figura sia una porzione di conoide parabolico.

Sia SEFT una parabola, il cui parametro $=\frac{v^2}{g}$, e la equazione $\frac{v^2}{g}\cdot\overline{g-x}=p^2$. Essendo $nv^2=b$, $np^2=y$, nella formola generale si avrà $\frac{b}{g}\cdot\overline{g-x}=y$. Dinotante la forza viva dell'acqua contenuta $\frac{c^2u^2}{2}\int\frac{dx}{y}$ nella porzione di gorgo SMNT, si sostituisca in vece di y il suo valore, e ne proverrà $\frac{c^2u^2}{2}\int\frac{g\,dx}{b\cdot\overline{g-x}} = \frac{gc^2}{b}\cdot\frac{u^2}{2}\int\frac{dx}{g-x} = \frac{gc^2}{b}\cdot\frac{u^2}{2}\cdot\log\frac{g}{g-x}$. Posta $x=20$ $=g\cdot\frac{b-c}{b}$, avremo la forza viva dell'intero gorgo $=\frac{gc^2}{b}\cdot\frac{u^2}{2}\cdot\log\frac{b}{c}$, e ne nasceranno le formole

$$\frac{\sqrt{4 \varepsilon a b^3}}{\sqrt{(fbc^2 - bsc^2 + b^2 s + bgc^2 \cdot \log \cdot \frac{b}{c})}} = u$$

$$\frac{\sqrt{4 \varepsilon a b^2 z}}{\sqrt{(fbc - c^2 z + b^2 z + bgc \cdot \log \cdot \frac{b}{c})}} = u$$

Da tali formole si deduce la stessa importante conseguenza, che basta che sia $s = \frac{c^{\frac{3}{2}}}{b}$, $z = c^{\frac{1}{2}}$, acciocchè l'acqua uscente dal foro acquisti sempre la velocità $\sqrt{4 \varepsilon a}$.

Paragono la forza viva dell'acqua nel gorgo secondochè la figura SEFT è circolare, o parabolica, e suppongo che le specie analitiche abbiano in entrambe lo stesso valore.

Forza viva dell'acqua del gorgo nel circolo $= \frac{c^2}{nng} \cdot \log \cdot 4 + \log \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{u^2}{2}$

$= \frac{c^2}{nng} \cdot \log \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{u^2}{2}$ adequatamente, supponendosi c minima, e per conseguenza $\log \cdot \frac{b}{c} = \infty$

Forza viva dell'acqua del gorgo nella parabola $= \frac{gc^2}{3b} \cdot \log \frac{b}{c} \cdot \frac{u^2}{2}$

Ma $b = ng$; dunque la detta forza viva $= \frac{c^2}{ng} \cdot \log \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{u^2}{2}$.

Si inferisca che le due forze vive stanno come $\frac{1}{n} : 1$, ossia come $1 : n$; ma essendo amendue infinitesime dello stesso grado, basta che sia $z = c^{\frac{1}{2}}$, acciocchè l'acqua che sgorga dal vaso abbia fatto acquisto della velocità $u = \sqrt{4 \varepsilon a}$.

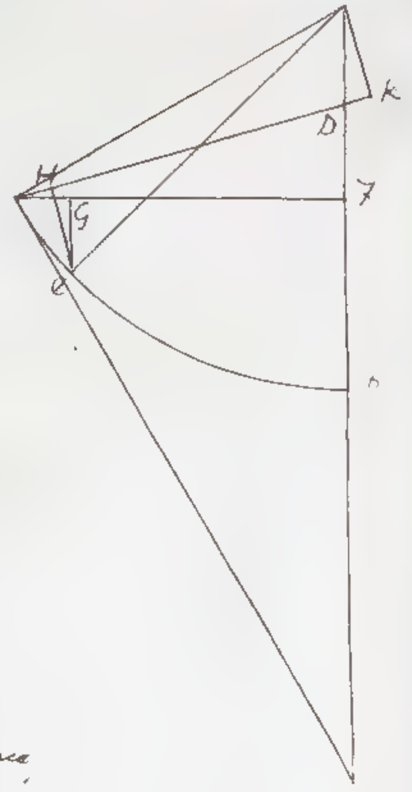
Paragonate le forze vive di due gorghi, uno di figura ellittica, i cui semidiametri $2T = g$, $2V = ng$, e l'altro di figura parabolica, in cui $2T = 2V = g$, le forze vive dell'acqua nei due gorghi sarebbero uguali.

$n \varepsilon \cdot ng : n \varepsilon \cdot g$

Problema

Determinare col mezzo d'un pendolo la velocità dell'acqua corrente ponendo in opera il metodo delle azioni.

Determinare col mezzo di un pendolo
la velocità dell'acqua corrente,
ponendo in opera il metodo
delle azioni.



Immerso un pendolo AB nell'acqua, che corra con qualsivoglia inclinazione all'orizzonte da D verso C, devia dalla verticale AB, e si ferma in quel sito AC, dove la forza della gravità della ghianda C fa equilibrio colla forza contraria dell'acqua.

Chiamo u la velocità dell'acqua, ed avverto, che il Co. Jacopo mio Padre ha dimostrato nella dissertazione sopra la forza, colla quale i corpi fluidi urtano nei solidi, che la forza sollecitante dell'acqua sta come u^2. Sia questa eguale ad $\frac{u^2}{g}$: $\frac{1}{g}$ è un coefficiente costante, la cui determinazione supposta la ghianda di figura sferica, dipende dalla gravità specifica, e dalla grandezza di essa ghianda, e dallo stabilire per via degli esperimenti la precisa legge media fra quelle dei corpi molli, ed elastici, colla quale il moto passa dal fluido al solido.

Segnato il minimo arco Ce, si tirino le linee, C7 orizzontale, eG verticale, eH normale a CD, e conducasi al punto C del circolo CeB la tangente CJ, che tagli la verticale AB continuata nel punto J. Descrivasi inoltre per il punto A la linea AK perpendicolare a CD prorogata.

Se la ghianda C, il cui peso in dentro dell'acqua, ~~[illegible]~~, si movesse per l'arco Ce, si accosterebbe al centro dei gravi per lo spazietto Ge, e la sua azione si agguaglierebbe ad m · Ge. In tanto l'acqua, le cui sollecitazioni hanno la direzione KC, resisterebbe per lo spazio HC con una reazione espressa dalla quantità

$\frac{u^2}{g} \cdot HC$

Si otterrà l'equilibrio, quando le mentovate

Due

?.8:3nn

Due azioni contrarie saranno pari, onde si verifichi l'equazione $m \cdot GQ = \frac{u^2}{3} \cdot HC$, da cui si deduce $\sqrt{3m \cdot \frac{GQ}{HC}} = u$

Passa similitudine fra i due triangoli rettangoli QCH, CAK; perchè componendo un retto tanto i due angoli QCH, KCA, quanto i due KCA, CAK; detratto il comune KCA, restano gli angoli eguali QCH, CAK quindi avremo l'analogia

QC : HC :: CA : AK

I triangoli pariormente simili CQG, ACT somministrano l'analogismo

QC : GQ :: CA : CT

il quale combinato coll'antecedente, ne suggerisce un terzo

GQ : CT :: HC : AK, da cui si ricava l'equazione $\frac{GQ}{HC} = \frac{CT}{AK}$.

Sostituito nella soprapposta espressione della velocità dell'acqua in cambio di $\frac{GQ}{HC}$ il ritrovato valore, si ha respettiva $\sqrt{gm \cdot \frac{CT}{AK}} = u$, cioè a dire, mentre non variata la girinda del pendolo sia costante il coefficiente $\sqrt{gm}$, la mentovata velocità in ragione composta, diretta dimezzata del seno CT dell'angolo di deviazione, che il filo AC del pendolo forma colla verticale AT, ed inversa ragionevolmente dimezzata del seno AK, delli angoli che lo stesso filo AC forma colla direzione KC, per cui si move il fluido; il che &c.

Se la direzione dell'acqua fosse orizzontale, ne risulterebbe AK = AT, e conseguentemente u come $\sqrt{\frac{CT}{AT}}$, vale a dire la velocità del fluido in ragione composta, diretta dimezzata

dei

seno CZ dell'
del angolo di deviazione CAZ, e reciproca
altresì dimezzata de' seno del complemento
AZ del medesimo angolo.

Fatta la riflessione, che i triangoli simili
DCZ, CAZ si danno l'analogia
CD : CZ :: CA : AZ, e, per conse=
guenza l'equazione $\frac{CD \cdot AZ}{CA} = CZ$; per
rogato questo valore in vece di CZ
nella formola $\sqrt{gm \cdot \frac{CZ}{AK}} = u$, scopriva-
mo una nuova espressione della velocità
dell'acqua $\sqrt{gm \cdot \frac{CD \cdot AZ}{CA \cdot AK}}$ u, che
ci insegna, stare la detta velocità in ra=
gione composta, diretta dimezzata della
tangente CD dell'angolo di deviazione
CAZ, e del seno del complemento AZ
dell'angolo stesso, ed inversa parimente
dimezzata del seno AK dell'angolo ACK
che formano il filo AC del pendolo, e
la direzione KC del fiume.

Mentre la menzionata direzione fosse orizzon-
tale, AK si eguaglierebbe ad AZ, e
si avrebbe $\sqrt{gm \cdot \frac{CD}{CA}}$ u, cioè
la velocità dell'acqua come la radice
della tangente CD dell'angolo di de-
viazione CAD.

B

B 十八

Osservazioni, e scritti sopra
varie Opere di Meccanica, e Idraulica
di varj celebri Autori

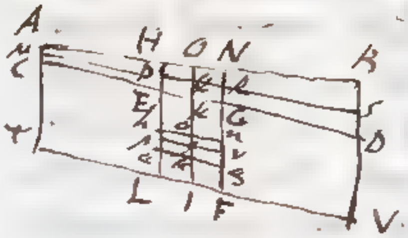
Annotazioni alla Memoria
del Signor
Teodoro Bonati

B

Annotazioni alla Memoria del
Sig.r Teodoro Bonati

Pag. 860 Sia. Qualunque sieno le velocità dell'acqua da O sino in I, sarà sempre vero che le dette colonne (LH, IO, FN) premeranno continuamente al basso con tutto il loro peso. Se l'azione del peso della colonna per esempio FN è totalmente impedita, preme la stessa colonna il fondo del fiume, o la particola F, con tutto il suo peso; ma se la detta azione non è del tutto impedita, si diminuisce la pressione del fondo, o della particola F. Si taglino le linee minime uguali HO, ON, e tirate le verticali HL, OI, NF, si seguino le infinitesime HE, NG proporzionali ad HL, NG, e si conduca la retta EG. Divise per metà le linee HE, NG nei punti P, R, si meni la retta PR, che passerà per centri di gravità delle masse minime HK, OG. Risolto il peso di ciascuna di tali masse in due forze, una per la direzione PR, e l'altra ad essa normale, saranno queste proporzionali alle dette masse. E conciosiachè le mentovate forze normali prementi i rispettivi centri di gravità spingano egualmente da tutti i lati per la nota proprietà dei fluidi, ne segue che le particole HK, OG si premeranno contrariamente in ragione delle loro masse. Se la superficie AB del fiume diverge dal fondo TV, abbiamo HK < OG, e perciò è ritardata la velocità della particola HK. Se AB è parallela a TV, l'una particola nè accelera, nè ritarda l'altra; perchè sono eguali. Che se AB converge con TV, essendo HK > OG, la prima particola accelera la seconda. Discendendo dalla superficie verso il fondo, se le linee AB, TV sono divergenti;

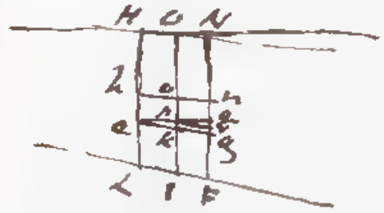
cresce



cresca la forza per la direzione pv, ma cala la forza ad essa normale, e per conseguenza la particola hk è meno ritardata. Tutto il contrario succede, quando le linee AK, TV sono convergenti, ed in questo caso la particola Og è meno accelerata. Essendo per altro infinitesime del secondo grado le differenze delle linee HE, QK, NG, i predetti ritardamenti, o acceleramenti minimi in tempo finito sono trascurabili; e quindi nella velocità di uno strato AD nulla influisce la forza normale alla direzione MS.

* Di nuovo dunque considerava la sola forza per la direzione MS, ms. Ho detto che passando dalla superficie al fondo, cresce la forza per la direzione ms, ossia pv, se le linee AK, TV sono divergenti; per tal cagione adunque le velocità vanno sempre aumentandosi, procedendo dalla resistenza del fondo. Se le rette AK, TV sono parallele, la velocità dall'alto al basso è sempre costante. Che se le rette AK, TV sono convergenti, calano le forze per la direzione ms quanto più lo strato ad è vicino al fondo, e per conseguenza il fiume ha nella superficie la massima velocità.

* È vero ciò quando si considerano le sole forze delle particole hk, og; ma considerando, che le azioni di tali forze nelle due colonne Hk, Og sono quasi totalmente impedite, ne segue, che le particole hk, og sostengono una pressione originata dal peso delle due mentovate colonne



Si tiri eq parallela ad HN, ed indi pr parallela ad eg, e chiaro si scoprirà che il peso della colonna Hk è superato dal peso della colonna Og per una quantità proporzionale al parallelogrammo pg. Ora essendo l'angolo qeg finito, le linee eg, gq stanno in ragione finita, e perciò il ~~paral~~parallelogrammo pg, all'altro og esprimente il peso della particola og si riferiscono in proporzione finita. Ottieniamo pertanto che se le linee HN, LF sono divergenti, la particola hk viene tanto più ritardata quanto è più profonda, ed al contrario se le dette linee sono convergenti

B

Riflessioni sopra varie Opere
del Cav. Lorgna.

Riflessioni intorno alla Memoria del
Sig. Cav. Lorgna dei Navigli a Remi.

pag. 463. Ogni resistenza si misura con un peso
La resistenza dipendente dalla inerzia della materia non si misura con un peso. Se non ci fosse la resistenza di viscosità, di fregamento, una data forza è atta a muovere qualunque massa orizzontalmente.

Se fosse invincibile l'ostacolo A, diventando la verga una leva del secondo ordine, dovrebbe la potenza P al peso V avere pel movimento ragione maggiore di quella, che ha l'intervallo VA all'intervallo PA ec. Significando V la massa del naviglio, che si muove orizzontalmente, non si dee considerar come un peso, e perciò prescindendo da altra resistenza, qualunque forza P sarebbe idonea a imprimergli moto. Posto che si finga la massa A, ed il punto stabile M cada fra V ed A, la forza P applicata in P equivale alla forza $P.\frac{PM}{VM}$ applicata in V, ed è lo stesso in riguardo al moto come se la massa V fosse dotata della gravità $\frac{P.PM}{VM}$ per la direzione VV', che certamente si moverebbe, ed imprimerebbe moto col mezzo del vette VMA alla massa non grave A.

pag. 464. Afferma l'Autore, che il punto M è il centro di gravità dei pesi A, V. Più propriamente avrebbe dovuto dire, ch'è il centro delle masse A, V

pag. 465. Vuole P.PM doppio di V.VM = A.AM. È questa una proposizione, che non si accorda colla verità. Sia E lo spazio, che con moto accelerato un grave percorre nel tempo k, e si chiamino u, v le velocità delle masse V, A. Se non ci fossero resistenze si verificherebbe la formola
$E\,P.\,PP' = V.\frac{u^2}{2} + A.\frac{v^2}{2}$, la quale non ci può mai guidare a quest'altra $P.PM = V.VM + A.AM$.

Ecco qualmente ricorrendo al metodo delle azioni

Soluzione col Metodo delle Azioni del Problema, che determina il moto dei Navigli a Remi e in riguardo allo spazio, e in riguardo al tempo del Sig. Co. Giordano Riccati

La Introduzione alla Memoria dei Navigli a Remi pubblicata nel Tomo II. della Società Italiana è degna del suo Chiarissimo Autore il Sig. Cav. Lorgna. Ottimamente egli riflette, che applicato il remo PA (Fig. 1) al punto V della sponda del naviglio, non

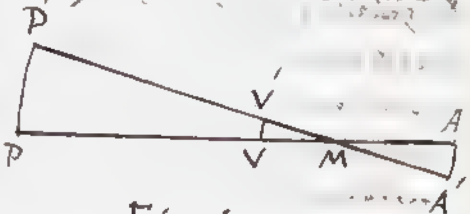


Fig. 1.

non si può considerar come stabile nè il detto punto, nè il punto A, immerso nell'acqua, ch'è posto in moto dal remo. Il centro M delle masse V del naviglio, A dell'acqua scacciata fuori di luogo è il punto fermo, intorno a cui allora il remo si gira.

Stabilito questo principio, mi è caduto in pensiero, ricorrendo al Metodo delle Azioni, di sciogliere il Problema del moto dei Navigli a Remi rispettivamente allo spazio da essi scorso, ed al tempo impiegato a percorrerlo.

Due specie di resistenze ec.

azioni si sciolga il Problema del moto del naviglio e ~~in riguardo~~ allo spazio, e in riguardo al tempo.

Due spezie di resistenza patisce la barca, una nu^2 proporzionale al quadrato della sua velocità, e l'altra costante $= g$. La prima spezie nasce dall'acqua, che il naviglio scaccia fuori di ~~luogo~~ sito, e dal fregamento, che per tal cagion ne risulta proporzionale alla resistenza nu^2. Ha l'origine la seconda spezie dalla viscosità, e dal fregamento prodotto dal premere che fa l'acqua la porzione costante del naviglio, ch'è immersa.

~~Avremo pertanto la formola~~ Fatta pertanto $VV' = s$, ed usata la forza $\frac{P.PM}{VM}$ applicata in V equivalente alla forza P applicata in P; + e chiamando ~~inoltre~~ E lo spazio, che con moto accelerato un grave percorre nel tempo k di ~~un minuto~~ secondo; avremo la formola

$\frac{P.PM}{VM}.E ds - nu^2 E ds - gE ds = Vu du + Av dv$
$= Mu du + mv dv$, ponendo $V = M$; $A = m$:
ma $u : v :: du : dv :: VM : AM$; dunque
$v = \frac{AM}{VM} u$; $dv = \frac{AM}{VM} du$, e perciò sostituendo $\frac{P.PM}{VM}.E ds - nu^2 E ds - gE ds = Mu du +$
$m.\frac{\overline{AM}^2}{\overline{VM}^2} u du = \left(\frac{M.\overline{VM}^2 + m.\overline{AM}^2}{\overline{VM}^2}\right). u du$

Perchè $M.VM = m.AM$, avremo $M : m :: AM : VM$, e quindi $M+m : m :: AM+VM = VA : VM$, e passando alle equazione, $VM = \frac{m}{M+m}.VA$, e non altrimenti $AM = \frac{M}{M+m}.VA$. Si ponga $VA = b$, e si determineranno $VM = \frac{mb}{M+m}$, $AM = \frac{Mb}{M+m}$. Fatta inoltre $PV = a$, scopriremo $PM = PV + VM = a + \frac{mb}{M+m}$
$= \frac{\overline{M+m}.a + mb}{M+m}$. Effettuate le sostituzioni, ci si presenterà, ridotto che sia il computo

$P.\left(\frac{\overline{M+m}.a + mb}{mb}\right) E ds - nu^2 E ds - gE ds =$
$\left(\frac{Mm + M^2}{m}\right). u du$ (1.)

Ho notato di sopra, che il Sig. Cav. Lorgna afferma essere $P.PM = aV.VM$. Sostituiti i valori di PM, V, VM dovrebbe avverarsi la formola $P.\left(a + \frac{mb}{M+m}\right) = aM.\frac{mb}{M+m}$ la quale è generalmente falsa; perchè la grandezza di P non dipende dai valori di a, b, M, m.

La velocità u del naviglio sarà giunta al massimo, quando sia il suo incremento $du = 0$.

In

In tal circostanza dunque si avrà

(a') $\frac{p}{n}\cdot\left(\frac{\overline{M+m}\cdot a+mb}{mb}\right)-\frac{e}{n}=u^2$. Se un grave discenda verticalmente per lo spazio y, abbiamo $2Ey=u^2$. Quindi $\frac{p}{2nE}\cdot\left(\frac{\overline{M+m}\cdot a+mb}{mb}\right)-\frac{e}{2nE}=y$ sarebbe quello spazio, per cui discendendo un grave, acquisterebbe la massima velocità u, che può guadagnare il naviglio.

Dalla formola (1.) si deduce quest'altra

$$\frac{2nm\cdot Eds}{Mm+M^2}=\frac{2udu}{\frac{p}{n}\cdot\left(\frac{\overline{M+m}\cdot a+mb}{mb}\right)-\frac{e}{n}-u^2}\ (3),$$

ad integrando

$$\frac{2nmEs}{Mm+M^2}=\log.\frac{B}{\frac{p}{n}\cdot\left(\frac{\overline{M+m}\cdot a+mb}{mb}\right)-\frac{e}{n}-u^2}$$

Si determina la costante B riflettendo, che ad $u=0$ dee corrispondere $s=0$: Sarà dunque

$$\log\frac{B}{\frac{p}{n}\left(\frac{\overline{M+m}\cdot a+mb}{mb}\right)-\frac{e}{n}}=0,$$

e se si prende per protonumero l'unità, $B=\frac{p}{n}\left(\frac{\overline{M+m}\cdot a+mb}{mb}\right)-\frac{e}{n}$.

Avremo pertanto

$$(4)\ \frac{2nmEs}{Mm+M^2}=\log.\frac{\frac{p}{n}\left(\frac{\overline{M+m}\cdot a+mb}{mb}\right)-\frac{e}{n}}{\frac{p}{n}\cdot\left(\frac{\overline{M+m}\cdot a+mb}{mb}\right)-\frac{e}{n}-u^2}$$

formola, che determina la relazione fra lo spazio s corso dalla barca, e la velocità u da essa acquistata.

Ho fatta l'osservazione essere il massimo valore di $u^2=\frac{p}{n}\cdot\left(\frac{\overline{M+m}\cdot a+mb}{mb}\right)-\frac{e}{n}$. Sostituito questo valore si trova $\frac{2nmEs}{Mm+M^2}=\log.\frac{1}{0}=\infty$. Non si acquisterebbe dunque la velocità equabile $u=\sqrt{\left(\frac{p}{n}\cdot\left(\frac{\overline{M+m}\cdot a+mb}{mb}\right)-\frac{e}{n}\right)}$ senon dopo scorso uno spazio infinito, il che si dee intendere in rigor matematico. Il naviglio per altro giunge ben presto ad una velocità fisicamente equabile. Sia u^2 eguale a $\frac{99}{100}$ del massimo valore, e si scoprirà $\frac{2nmEs}{Mm+M^2}=\log.100$: Ora il logaritmo iperbolico di $100=4,60517$, e per conseguenza $s=\left(\frac{Mm+M^2}{nmE}\right).2,302585$. Passato un tale

spazio

spazio, adunque, il quadrato della velocità è pervenuto a $\frac{99}{100}$ della massima grandezza, e la velocità a $\frac{199}{200}$, la quale perciò si può considerar equabile fisicamente.

Alla formola relativa allo spazio succeda quella in riguardo al tempo. Nella formola (3) in cambio di ds si ponga il suo valore $\frac{u\,dt}{k}$, e dividendo per u ne nascerà

$$\frac{nm\varepsilon\,dt}{(Mm+M^2).k} = \frac{du}{\frac{p}{n}.\left(\frac{Mm.a+mb}{mb}\right)-\frac{g}{n}-u^2}$$

Faccio $\frac{p}{n}.\left(\frac{Mm.a+mb}{mb}\right)-\frac{g}{n} = c^2$, e mi si presenta

$$\frac{nm\varepsilon\,dt}{(Mm+M^2).k} = \frac{du}{c^2-u^2} = \frac{du}{2c.(c+u)} + \frac{du}{2c.(c-u)}, \text{ ossia}$$

$$\frac{2cnm\varepsilon\,dt}{(Mm+M^2).k} = \frac{du}{c+u} + \frac{du}{c-u}, \text{ e per conseguenza}$$

integrando

(5) $$\frac{2cnm\varepsilon t}{(Mm+M^2).k} = \log.\frac{c+u}{c-u}.$$ Non si aggiunge costante; perchè ad $u = 0$ si riferisca $t = 0$

Abbiamo ~~veduto essere~~ essendo il massimo valore di $u^2 = \frac{p}{n}.\left(\frac{Mm.a+mb}{mb}\right)-\frac{g}{n} = c^2$, e perciò di $u = c$, se sostituiremo c in cambio di u nella formola (5) ~~Per la qual cosa quando uscire~~ scopriremo

$$\frac{2cnm\varepsilon t}{(Mm+M^2).k} = \log.\frac{2}{0} = \infty,$$ ~~formola~~ espressione che ci insegna rendersi necessario un tempo infinito, acciocchè il naviglio acquisti la velocità $= c$. Per giugnere nondimeno ad una velocità insensibilmente minore di c, non si ricerca che un tempo finito. Sia come sopra $u = \frac{199\,c}{200}$, e ne risulterà

$$\frac{2cnm\varepsilon t}{(Mm+M^2).k} = \log. 399.$$ Non ~~essendomi noti i~~ avendo la tavola dei logaritmi iperbolici senon dalli unità sino al dieci, e da questa deducendosi $\log. 400 = 2\log. 10 + \log. 4 = 5,99137$, sia

$$\frac{2cnm\varepsilon t}{(Mm+M^2)k} = \log. 400 = 5,99137,$$ e si troverà

$$t = \frac{2,995685.(Mm+M^2).k}{cnm\varepsilon} = \frac{2,995685.(Mm+M^2).k}{nm\varepsilon\sqrt{\left(\frac{p}{n}.\left(\frac{Mm.a+mb}{mb}\right)-\frac{g}{n}\right)}}$$

A cagione di paragonare la stabilità teorica colla sperienza, mi pongo sotto gli occhi la formola $u = \sqrt{\left(\frac{P}{n}\cdot\left(\frac{\overline{M+m}\cdot a+mb}{mb}\right)-\frac{g}{n}\right)}$ esprimente la massima velocità, a cui senon altro fisicamente perviene il naviglio. Ci siano sopra di esso dodici remiganti con altrettanti remi, e vogando primieramente quattro soli scorra la barca equabilmente lo spazio S nel tempo k di un secondo, onde si abbia $u = \frac{S}{k} = \sqrt{\left(\frac{P}{n}\cdot\left(\frac{\overline{M+m}\cdot a+mb}{mb}\right)-\frac{g}{n}\right)}$. Per M si deve intendere il peso o massa della barca, dei dodici remiganti, e dei dodici remi. Significa m la massa dell'acqua, che i remi staccian di luogo. Il volume di acqua, che muove ogni remo, si può determinare osservando la quantità della pala, che si immerge, e la misura dello spazio per cui cammina nell'acqua. Conosciuto il volume, si renderà facilmente noto il suo peso, proporzionale alla massa. Ci si manifesterà la forza di un remigante, se mettendosi nella positura di vogare, applicherà la sua forza al punto P (fig. 2.) della leva di braccia eguali VP, VA, il punto A della quale è tirato dal peso C. Si accresca un tal peso sintantochè faccia equilibrio colla forza del rematore, e per conseguenza ad essa eguagliandosi, ce ne renda noto il valore. Questo peso moltiplicato pel numero degli attualmente remiganti si eguaglierà a P.

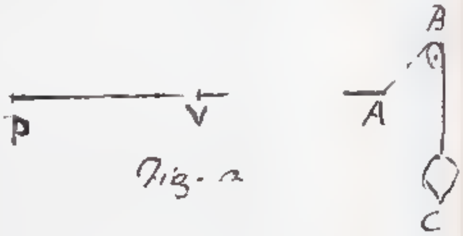


Fig. 2

Nella sovrascritta formola l'uniche quantità ignote sono, la resistenza costante g, ed il coefficiente n: Trovo primieramente il valore di $g = P.\left(\frac{\overline{M+m}\cdot a+mb}{mb}\right)-\frac{nS^2}{k^2}$.

Dopo ciò faccio che voghino otto remiganti, ed osservo quale spazio S' si percorra con moto equabile nel tempo k. Nella formola della massima velocità si ponga $2P$ in cambio di P, $2m$ in cambio di m, e lo scoperto valore di g, e ci si presenterà

$\frac{S'}{}$

$$\frac{S'}{k} = \sqrt{\left(\frac{2P}{n}\cdot\left(\frac{\overline{M+2m}\cdot a+2mb}{2mb}\right) - \frac{P}{n}\cdot\left(\frac{\overline{M+m}\cdot a+mb}{mb}\right)+S^2\right)}$$

Da questa formola si deduce

$$n = \frac{2P\cdot\left(\frac{\overline{M+2m}\cdot a+2mb}{2mb}\right) - P\cdot\left(\frac{\overline{M+m}\cdot a+mb}{mb}\right)}{S'^2 - S^2}$$

$$= \frac{P\cdot(a+b)}{b\cdot(S'^2-S^2)}.$$

Voglino in terzo luogo tutti i dodici remiganti, ed il naviglio nel tempo k di un minuto secondo viaggi per lo spazio S''. Nella formola della massima velocità si sostituisca 3P invece di P, e 3m invece di m, ed usati i valori stabiliti di q, e di n, si troverà

$$S'' = \sqrt{\left(\frac{3P\cdot\left(\frac{\overline{M+3m}\cdot a+3mb}{3mb}\right) - P\cdot\left(\frac{\overline{M+m}\cdot a+mb}{mb}\right)}{\frac{P\cdot(a+b)}{b\cdot(S'^2-S^2)}} + S^2\right)}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{(2P\cdot\overline{a+b}+bS^2)\cdot(S'^2-S^2)}{P\cdot\overline{a+b}}\right)}.$$

Se lo spazio S'' determinato colla sperienza si eguaglia prossimamente allo omogeneo di comparazione, la teorica è ~~pienamente~~ fisicamente confermata. ~~giusta~~. Che se fra i due valori si trovasse qualche ~~piccola~~ notabile differenza, nascerebbe forse questa in parte ~~dalla~~ dal non esatto stabilimento di P, e di m, le quali quantità farebbe di uopo rettificare con nuovi ed accuratissimi esperimenti. Può la stessa differenza ancora derivare per lo meno in parte dal non aver computati i particolari movimenti non comuni alla barca dei remiganti, e del remo, nei quali si impiega una parte della forza dei rematori, ~~la quale~~ che vuol esser detratta dal valore di P determinato colla esperienza. Scemando dunque il valore di P, si troverà con replicate attenzioni quella giusta misura, che nel movimento del naviglio si adopera. Si avverta inoltre, che i punti P, A (Fig. 1.) hanno da corrispondere, quello al centro della forza del remigante, e quello al centro della massa acquea spinta dal remo. Una tal riflessione serve per determinare rettamente i valori di a, e di b.

Riflessioni intorno alla Teoria
del Ch. Sig. Cav. Lorgna del moto
dei Liquidi uscenti da' fori
della conserva.

§ IV. Afferma il Sig. Cav. Lorgna, che la condizione dell'acqua ringorgata è un certo stato singolare partecipe di quiete, e di moto, e perciò assolutamente distinto dallo stato assoluto dell'uno, e dell'altro. Se l'acqua dentro del vaso non si movesse, la gravità dell'acqua stessa non eserciterebbe azione, e quindi non uscirebbe l'acqua dal vaso. La condizione adunque dell'acqua ringorgata è uno stato di moto lentissimo dentro del vaso, e molto celere nello spillo, che sgorga. Per la qual cosa l'acqua dentro del vaso non si può chiamar assolutamente stagnante, essendo la sua velocità in un vaso cilindrico a quella nel foro come la sezione del foro a quella del vaso.

§ IX. Non rettamente il Sig. Cav. critica il Newton quando asserisce la velocità dell'acqua uscente pel foro dovuta all'acqua, che discendesse dall'altezza, a cui la stessa si sostiene dentro del vaso. Il Newton suppone il vaso riempiuto di un solo fluido. Se i fluidi sono due acqua, ed olio; fa d'uopo che c'immaginiamo sostituito all'olio un egual peso di acqua, e si avvererà l'asserzione del Newton.

Dice il nostro Autore, che la pressione circonfusa al foro non è già quella della semplice colonna perpendicolare avente per base il medesimo foro, ma sì bene quella di tutta la massa. Nel principio del moto è minima la forza, che spinge l'acqua fuori del buco, la quale va poscia gradatamente crescendo, sintantochè diviene uguale al peso della colonna doppia di quella soprastante al foro. Sostiene poscia il Sig. Cav., che non v'è luogo all'azione di alcuna colonna determinata, il che ben volontieri gli accordo, essendo l'azione del peso di tutto il fluido contenuto nel vaso quella, che genera la velocità e dentro, e fuori del vaso, e dipendendo da tal azione, che la forza sollecitante l'acqua, che esca pel foro, divenga finalmente uguale al peso della colonna doppia di quella, che sta perpendicolarmente sopra del foro.

Vuole

, Vuole il Sig. Cav., che la pressione esercitata dalla massa del liquore circonfusa al foro adoperi a guisa di stantuffo nel cacciar l'acqua dal foro, e che perciò la forza, che ha essa all'uscita non è altrimenti acquistata dall'acqua per la discesa attuale fatta dalla superficie, e dal limite del ringorgo sino al foro. L'immagine dello stantuffo è appropriata. S'avverta per altro, che lo stantuffo si dee muovere, se ha da cacciare l'acqua fuori dal vaso.

Sì per quiete sensibile nei liquori ringorgati si intenda un moto minimo, io non contraddico.

§ X. Lo inclinarsi a poca distanza dal fondo del vaso i pezzetti di cavalacca verso il foro con un angolo acuto dimostra, che ivi si forma il gorgo.

§ XI. Che le velocità dell'acqua uscente pel foro si trovino in ragione dimezzata delle altezze, a cui l'acqua si sostiene dentro del vaso, è una conseguenza della formola $u = \frac{V(2abz)}{V(ac+bz)}$, in cui u significa la velocità, a l'altezza dell'acqua nel vaso, b la sezione orizzontale del vaso, che suppongo cilindrico, c la sezione del foro, z la lunghezza dello spillo sgorgato. Si trovano le velocità proporzionali alle radici delle predette altezze, quando è uscita una tal quantità di acqua, che ac possa fisicamente trascurarsi in riguardo a bz.

§ XV. Egli è vero, che la superficie dell'acqua ringorgata nella conserva donde fluisca il liquore per fori scolpiti in fianco, e nel fondo, e sia mantenuta a costante altezza durante il flusso sopra il centro de' fori, si mantiene sempre sensibilmente orizzontale; ma non è poi vero, che un tal sistema di acqua ringorgata, durante il flusso, si mantenga nell'interno della conserva sensibilmente in uno stato di equilibrio. Si dà l'equilibrio, quando è turato il foro. Aperto il foro, l'equilibrio si rompe; e quantunque sia insensibile la velocità dell'acqua dentro del vaso, l'acqua che sgorga dal foro, ci ammonisce che l'equilibrio più non sussiste.

§ XVI. Suppone il Cav. Lorgna, che nello stato di ringorgamento si dia una perpetua vicenda di equilibrj, e di disequilibrj, di moto, e di quiete. Ma per dir il vero non succede questa vicenda, ed è continuo il moto dell'acqua e nell'interno del vaso, e nel foro.

§ XVII.

§ XVII. Merita qualche limitazione la proposizione dell'Autore, che nello stato di vero ringorgamento non vada attesa nè estensione, nè figura di vaso, e nemmeno grandezza, e configurazione di orifizio. Quanto dentro certi limiti è più picciolo il foro relativamente al vaso, tanto più la velocità dell'acqua, che sgorga, si accosta alla radice della doppia altezza del fluido sopra il centro del foro.

§ XVIII. Tenta di provare il Cav. Lorgna, che l'attuale velocità di qualunque stilla di transito per entro la massa d'acqua ringorgata, durante il flusso, è sempre infinitamente piccola. Deduce la prova dal § XVI. che si dia una perpetua vicenda di moto, e di quiete; il che sendo falso, cade la supposta dimostrazione.

§ XIX. Dalla velocità infinitamente picciola ne inferisce l'equilibrio sensibile, e nega poscia la legge delle sezioni reciproche alle velocità. Se non si supplisse all'acqua uscita pel foro, la superficie suprema scenderebbe lentamente abbasso, e quindi ogni strato orizzontale occuperebbe il sito dello strato immediatamente inferiore; il che necessariamente richiede, che la velocità stiano in ragion inversa delle sezioni.

§ XX. Dice che i fenomeni apertamente ci dichiarano essere dovuta la velocità del flusso alla pressione dell'acqua circonfusa, non mai all'attuale discesa libera dal limite del ringorgo al sito del flusso, e seguita a supporre la continua vicenda di moto menomissimo, e di quiete. La velocità del flusso è dovuta all'azione della gravità dell'acqua contenuta nel vaso, la quale imprime velocità al corpo d'acqua dentro del vaso, ed allo spillo, che scaturisce dal foro. Si può anche dedurre la velocità del flusso dalla pressione, che nasce dall'azione impedita della gravità: ma il servirsi dell'azione della gravità è metodo più sicuro. Affermo nuovamente, che il corso discensivo non si interrompe, e che le stazioni momentanee non si possono accordare.

§ XXIII. Sostiene, che i fenomeni, e il rigoroso ragionamento portano a conchiudere doversi escludere inesorabilmente nell'interno dei liquori ringorgati i movimenti, che loro vengono dagli Idrodinamici comunemente attribuiti. Ho già notato al § XIX. che se in un vaso non si supplisse l'acqua, la superficie superiore calerebbe

abbasso

abbasso, il che chiaramente dimostra, che l'acqua dentro il vaso si muove.

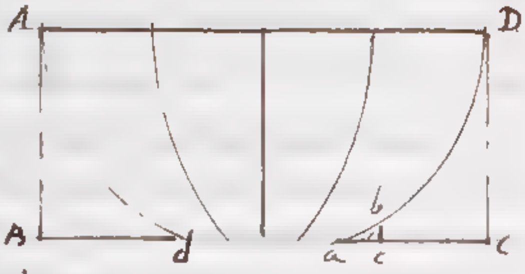
§ XXVI. Passando il Cav. Lorgna a trattare del movimento de' liquori uscenti dallo stato di ringorgo fuor dagli orificj scolpiti nella conserva, avanza questa Proposizione. <u>La stilla de' liquori fluenti da' fori della conserva, ove siano mantenuti a costante altezza sopra il centro de' medesimi fori, sono animate dalla gravità naturale, e dalla reazione delle pressioni circonfuse all'orificio insieme combinate.</u> Questa proposizione contien verità. E sentenza del Newton da me dimostrata nell'Annotazione allo Schediasma XXXVI. del Co. Jacopo Riccati mio Padre, che conservandosi l'acqua dentro del vaso all'altezza $= a$; quando la velocità della spilla, ch'esce pel foro, si agguaglia a $\sqrt{ra}$, la forza che direttamente lo spinge, si agguaglia al peso di una colonna acquea, la cui altezza $= ra$, e la base uguale al foro predetto. Supposta $ra = u^2$, si sostituisca $\frac{z}{t}$ in cambio di u, e si troverà $ra = \frac{zu}{t}$, e moltiplicando per t, e per c uguale al foro, o più esattamente alla sezione della vena più ristretta, $rac \cdot t = cz \cdot u$, formola da cui si raccoglie, che la forza rac moltiplicata pel tempo t si agguaglia alla massa cz moltiplicata per la velocità u. Nel principio del moto la forza è minima, e va poi crescendo sino alla nominata misura.

§ XXVIII. Soggiunge poscia, <u>che il moto attuale della vena uscente dall'orificio è moto composto combinato colla gravità naturale della stilla.</u> Qualora le velocità dentro, e fuori del vaso sono giunte al massimo, tutta l'azione della gravità dell'acqua contenuta nel vaso si impiega a spignar fuori pel buco l'acqua $bs = cz$. Il perchè in tale incontro si avverà la formola $ab \cdot s = bs \cdot \frac{u^2}{r}$, e quindi $ra = u^2$, e $\sqrt{ra} = u$.

§ XXIX. Dal moto composto cava la conseguenza, <u>che ne' margini degli orifizj per quello appunto che vi si inflettono i filamenti concorrenti al foro, accade vera ed effettiva perdita di forza, cioè vero ed effettivo scemamento nella velocità assoluta della stilla.</u> Calerà la velocità a cagione della resistenza di fregamento di tenacità; ma prescindendo da questa, dee valere la sovrascritta formola nell'addotta circostanza, il che dipende dalla proprietà dei fluidi di esercitare le loro pressioni per qualunque direzione.

§ XXXI.

§XXXVI. Dopo ciò assunta l'unità per altezza modulare costante del liquore nella conserva, cerca l'angolo d'inclinazione bac sotto una tale altezza. L'angolo, col quale l'acqua si inclina verso del foro, non può esser costante, il che viene chiaramente indicato dalla figura qui a canto. Trova l'Autore il seno dell'angolo bac uguale a $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.



§XXXVII. Data la forza e la direzione, con cui opera il liquore al margine dell'orificio sotto la data altezza modulare mantenuta costantemente nella conserva; indaga il Sig. Cav. l'altezza dovuta alla velocità effettiva ed attuale della vena intera all'uscir dall'orificio, e trova la detta altezza $= 2\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2$, essendo l'unità l'altezza modulare permanente del liquore.

§XXXVIII. Afferma ottimamente nel Corall. IV. <u>che la velocità iniziale nel primo aprirsi di un foro in fondo, o in fianco di una conserva, non può essere che infinitamente piccola</u>, come patentemente deducesi dalla mia formola $u = \frac{\sqrt{(2abz)}}{\sqrt{(ac+bz)}}$, in cui posta minima la lunghezza z della vena, è parimente minima la velocità.

Nel Corall. V. stabilisce la velocità di un grave liberamente disceso dall'altezza modulare 1. alla velocità effettiva delle stille uscenti pel foro come $1 : \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) \cdot \sqrt{(\sqrt{5}-1)}$; che riduce alla prossima ragione di $55 : 36 = 8 : 5\frac{13}{55}$. Ora questa velocità è troppo scarsa, ed è contraddetta dai fenomeni. Mi servirò di una sperienza, che si legge alla pag. 19. dell'Opera <u>De Castellis</u> dell'accuratissimo Sig. March. Giovanni Poleni. Al forame laterale di un vaso applicò un fusto conico, la cui lunghezza lin. 92, il diametro del maggior orificio lin. 33, il diametro del minore lin. 26. L'altezza costante dell'acqua nel vase sopra i centri situati nella stessa linea orizzontale dei due orificj era di lin. 256. Schiuso il foro trovò il minimo diametro della vena, ove l'acqua è ridotta a un di presso alla sua natural densità, di lin. 25, ed il tempo, in cui si scaricò una determinata copia d'acqua di pollici cubici 7303,5 = lin. cubiche 12620448, l'osservò uguale a 2', 53'' = 173''.

La quantità di fluido, che scaturisce da un foro, sta in ragion composta del quadrato del diametro della vena, del tempo, e della media velocità; dunque la velocità media segue la ragione diretta della

predetta

predetta quantità, ed inversa del quadrato del diametro della vena, e del tempo, e per conseguenza sta come $\frac{126204440}{(25)^2 \cdot 177} = \frac{126204440}{110625}$.

Cerchiamo presentemente la misura assoluta della velocità nell' addotta esperienza. Chiamato d il diametro della vena, ed espressa per $1 : n$ la proporzione fra il diametro, e la circonferenza circolare, sarà la sezione della vena $= \frac{nd^2}{4}$. Pongasi $n = \frac{355}{113}$, ed assunto $d = 25$, troveremo $\frac{nd^2}{4} = \frac{221875}{452}$ prossimamente uguale a linee quadrate 491. Dividendo la quantità 126204440 dell' acqua uscita per $\frac{221875}{452}$ sezione della vena, il quoziente = lin. 257101 è lo spazio scorso dall' acqua in secondi 177: Avremo dunque la velocità media dell' acqua stessa $= \frac{257101}{177} = 1452$.

L'acqua conforme ho detto era sostenuta nel vaso sopra i centri dei due orificj all' altezza di lin. 256. Se ci vuole un minuto secondo, acciocchè un grave scorra con moto accelerato poll. 181 = lin. 2172, per passare con moto altresì accelerato lin. 256, si richiederà il tempo determinato dalla seguente analogia $\sqrt{(2172)} : \sqrt{(256)} = 16 :: 1'' : \frac{16''}{\sqrt{(2172)}} = t$. E poichè nello stesso tempo coll' equabile velocità terminale cammina il corpo uno spazio doppio = 512, sarà la sua velocità $= \frac{512}{t} = \frac{512 \cdot \sqrt{(2172)}}{16} = 32\sqrt{(2172)} = 1491$.

La velocità media pertanto nell' addotta esperienza alla velocità di un grave disceso dalla sublimità di lin. 256, a cui si alzava l'acqua dentro del vaso sopra i centri dei due orificj, stava come 1452 : 1491, o sia prossimamente come 37 : 38. E poichè la velocità massima esser dee alquanto maggiore della media; la velocità massima a quella di un grave caduto da lin. 256 si riferirà in una ragione più prossima di 37 : 38, e tanto più quanto che nella più ristretta sezione della vena l'acqua non era forse ridotta totalmente alla sua natural densità. Ma attenendomi ancora alla proporzione 37 : 38, si vede quanto essa discordi da quella 36 : 55 stabilita dal nostro Autore.

Tenta egli di sostenere nel Capitolo quarto non doversi aver riguardo al più picciolo diametro della vena, ma sì bene a quello del foro attuale, ed effettivo unicamente. Benchè ciò non si possa concedere, in tale ipotesi succederebbe, che la velocità media corrisponderebbe a quella di un grave liberamente disceso dall' altezza 256 come $\frac{37 \cdot (25)^2}{(26)^2} = 34 + \frac{121}{676} : 38$. Facciasi come $55 : 36 :: 38 : \frac{1368}{55}$ = 24 48/55, e si osservi, che di gran lunga

non

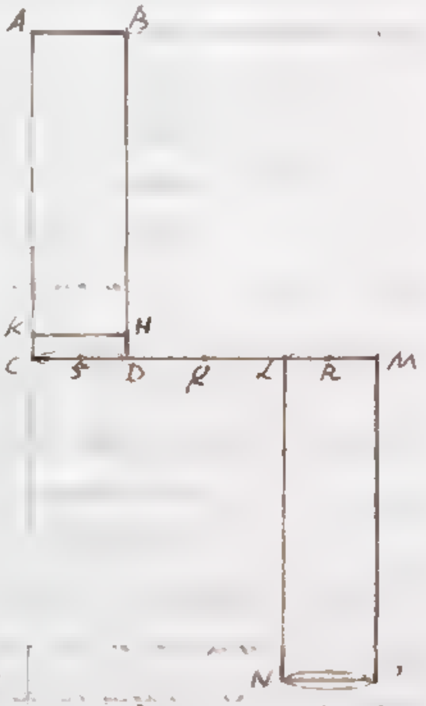
non si agg[i]ustano le partite, essendo $24 + \frac{44}{45}$ molto minore di $34 + \frac{141}{6176}$.

Si conchiude finalmente non potersi approvare la teorica del Sig. Cav. Lorgna; perchè non va d'accordo col metodo infallibile delle azioni, e cogli esperimenti fatti colla massima diligenza.

Riflessioni intorno alla Misura
dell'impulsione permanente
de' liquidi contro le superficie
piane stabilita dal Sig. Cav.
Lorgna.

§ VIII. Determina il Sig. Cav. Lorgna l'impulsione permanente perpendicolare di una vena di liquore uniformemente fluente nel vacuo contro una superficie piana immobile simile ed eguale alla sezione prossima imminente della vena, il cui piano sia perpendicolare alla direzione del moto, e trova che ha per misura il peso di un prisma del medesimo liquore avente per base la medesima sezione della vena, e la superficie percossa; e per altezza il doppio dell'altezza, da cui dovrebbe scendere nel vacuo liberamente dalla quiete un grave per acquistare la velocità uniforme della vena.

Mi ingegnerò di sciogliere il Problema, e confronterò poscia la mia soluzione con quella del Sig. Cav. Sia $AD = v$ l'altezza della vena AD, e $DH = dv$ l'altezza dello strato infimo del liquore, la cui densità $= d$. Pongasi $= f^n$ e la superficie percossa, e la base della vena, e sarà la massa, ed il peso dello strato $CH = df^n dv$. Sia c la celerità dovuta all'altezza $AD = v$, e per la nota formola avremo $df^n dv . v = df^n dv . \frac{c^2}{2}$. Cerco il valore del peso p, che mediante il vette di braccia eguali QS, QR faccia equilibrio colle impulsione dello strato KD. Tenti il peso p di agire per lo spazietto dv, e la predetta impulsione tenterà di reagire similmente per dv. Avremo dunque, se si ha da ottener l'equilibrio, $df^n dv . v = p dv$, e dividendo per dv, $df^n v = p$, cioè il peso p, ch'è la misura cercata della impulsione, uguale al peso di un prisma del medesimo liquore avente per base la



sezione della vena, e per altezza non $2v$, come vuole il nostro Autore, ma bensì v, da cui discendendo lo strato KD ha fatto acquisto della velocità c.

Pervenuto l'Autore alla formola $df^2 dv \cdot 2v = df^2 dv \cdot c^2$, stabilisce l'impulsione $= df^2 dv \cdot c^2$, la quale suppone che si sia esercitata l'azione $df^2 dv \cdot 2v$, mentre che non è seguita salvo che l'azione $df^2 dv \cdot v$, essendo disceso lo strato $KD = df^2 dv$ dalla sublimità $AD = v$. Egli è manifesto, che l'azione $df^2 dv \cdot v$ del peso $df^2 dv$, che discende dall'altezza v, si eguaglia all'azione $df^2 v \cdot dv$ del peso $df^2 v$, che discende dall'altezza dv; e quindi si pareggiano le due impulsioni. Si cavi la conseguenza non esser giusta la soluzione del Sig. Cav. Lorgna, ed egualmente ingannarsi il Sig. de la Grange, ch'è dello stesso parere.

Determina poscia il nostro celebre Scrittore l'impulsione permanente obbliqua della medesima vena contro una superficie piana immobile simile ed eguale alla sezione prossima immediatamente della vena, il cui piano faccia lo stesso angolo obbliquo colla direzione del moto, e trova che ha per misura il peso d'un prisma del medesimo liquore avente per base la sezione della vena perpendicolare alla direzione del moto diminuita in ragione del seno tutto al seno dell'obbliquità dell'impulsione, e per altezza il doppio dell'altezza dovuta alla velocità della vena.

Premessa la mia soluzione, la paragonerò con quella del Sig. Cav. Lo strato KD è fornito della velocità c acquistata discendendo dalla sublimità $AD = v$. Sia $7H = c$, e tirata $7e$ normale a KH, e nominato φ l'angolo $7He$, sarà come il seno tutto $= 1 : \text{Sen.}\varphi :: 7H = c : 7e = c \cdot \text{Sen.}\varphi$, e con tale velocità lo strato KD urterà la superficie CD. Poiché $\frac{c^2}{2} = v$, sarà $\frac{c^2}{2} \cdot (\text{Sen.}\varphi)^2 = v \cdot (\text{Sen.}\varphi)^2$, e questa sarà l'altezza debita alla velocità $c \cdot \text{Sen.}\varphi$. La massa o peso dello strato KD si eguaglia alla massa o peso dello strato orizzontale $GD = df^2 dv$. Avremo perciò $df^2 dv \cdot \frac{c^2}{2} \cdot (\text{Sen.}\varphi)^2 = df^2 dv \cdot v (\text{Sen.}\varphi)^2$, ovvero $df^2 (\text{Sen.}\varphi)^2 \cdot dv \cdot \frac{c^2}{2} = df^2 (\text{Sen.}\varphi)^2 \cdot dv \cdot v$. Da questa formola si raccoglie, che nel nostro caso la misura dell'impulsione si eguaglia al peso di un prisma dello stesso liquore avente per base la sezione della vena normale alla direzione del moto diminuita in ragione non del seno tutto al seno dell'obbliquità dell'impulsione

siona

sione, ma bensì in ragione duplicata della predetta, e per altezza quella, ch'è dovuta alla velocità della vena, e non il doppio di tale altezza. Le cose, che ho detto di sopra, mostrano ad evidenza la verità della mia formola.

§ XI. Per conformare la sua teorica in riguardo alle impulsioni normali, si serve il Cav. Lorgna delle vene, che scaturiscono dai fori delle conserve. Sia nella stessa l'acqua mantenuta all'altezza costante v. Ha stabilito il nostro Autore nella precedente Memoria, che la velocità c di un grave liberamente discesa dall'altezza v sta alla velocità effettiva della vena uscente pel foro come $55c : 36c$. Troveremo l'altezza debita a questa seconda velocità mediante l'analogia $(55c)^2 = 3025c^2 : (36c)^2 = 1296c^2 :: v : \frac{1296v}{3025}$. Per la qual cosa l'altezza del prisma urtante secondo la sua dottrina esser dovrebbe uguale a $\frac{1296}{3025}$, e l'impulsione prodotta $= df^2 \cdot \frac{2592}{3025} \cdot v$ non poco minore di $df^2 v$.

Dall'esperienza del Sig. Marchese Poleni ho dedotto, che la velocità c di un grave caduto liberamente dalla sublimità v si riferisce a quella della vena scaturita pel foro in una ragione più prossima di $34 : 37$. Supponiamola di $34 : 37\frac{1}{2}$, e stando $(34)^2 : (37\frac{1}{2})^2$ prossimamente come $34 : 37$, coll'analogia $34 : 37 :: v : \frac{37v}{34}$ troveremo l'altezza debita alla velocità $\frac{(37\frac{1}{2})}{34} \cdot c$. Il perchè l'altezza del prisma sarà $= \frac{37v}{34}$, ed il peso $= df^2 \frac{37v}{34}$ di questo prisma secondo la mia dimostrazione farà equilibrio coll'impulsione dello strato KD fornito della velocità $= \left(\frac{37\frac{1}{2}}{34}\right) \cdot c$.

Soluzione col Metodo delle Azioni di alcune Proposizioni contenute nei Saggi di Statica e di Meccanica del ch. Sig. Col.° Anton-Mario Lorgna.

Proposizione I.

Trovare la spinta orizzontale sostenuta da' punti A, B (Fig. 1.), su' quali si appoggia la verga rigida AB, essendo perfettamente levigati i piani AD, DB, e ritenuto il capo B della verga da un ostacolo.

Vado primieramente in traccia della spinta orizzontale, che soffre il punto B; Posta AB $= h$, AD $= f$, BD $= g$, sia E il centro di gravità della verga AB, che la divida in modo, che sia AE : EB :: $m : n$. Discenda il punto A pel minimo spazio $Aa = x$, ed il punto B scorra lo spazio infinitesimo orizzontale Bb. Essendo $aD = f - x$, agevolmente si scopre $\sqrt{(h^2 - f^2 + 2fx - x^2)} = Db$: ma $h^2 - f^2 = g^2$; dunque $\sqrt{(g^2 + 2fx - x^2)} = g + \frac{fx}{g} = Db = DB + Bb = g + Bb$, e per conseguenza $Bb = \frac{fx}{g}$.

Si tiri la linea aB, e per i punti E, e si conducano le verticali EI, ei parallele ad AD, la prima delle quali taglierà la retta aB nel punto K. Si congiungano i punti e, K. Nel triangolo BAa abbiamo AB : BE :: Aa : EK

$m+n : n :: x : \frac{nx}{m+n}$

e ne risulta $EK = \frac{nx}{m+n}$. Il triangolo BAD mi dà AB : BE :: AD : EI

$m+n : n :: f : \frac{nf}{m+n} = EI$, e quindi

si

Corollario II.

si deduca $KI = EI - EK = \frac{n}{m+n}\cdot(f-x)$. Mi rivolgo ora al triangolo baD, da cui raccolgo

$ba : be :: aD : ai$

$m+n : n :: f-x : \frac{n}{m+n}\cdot(f-x)$. Il perché

$ai = \frac{n}{m+n}\cdot(f-x) = KI$, e per conseguenza la linea ak orizzontale, e parallela a BD. Quando dunque il centro di gravità della verga AB è passato da E in e, lo stesso è disceso verticalmente per la retta $EK = \frac{nx}{m+n}$:

Sia γ la forza orizzontale applicata in B atta ad impedire il moto della verga AB. Ciò accaderà pel Metodo delle Azioni, quando si abbia (chiamato p il peso della verga AB)

$\gamma\cdot Ab = \gamma\cdot\frac{fx}{g} = p\cdot EK = p\cdot\frac{nx}{m+n}$. Mi somministra questa equazione il valore di

$\gamma = \frac{n}{m+n}\cdot\frac{pg}{f}$, la qual forza facendo equilibrio colla spinta parimente orizzontale del punto B, ne segue essere la detta spinta $= \frac{n}{m+n}\cdot\frac{pg}{f}$, come si dovea dimostrare.

Per iscoprire la spinta orizzontale sostenuta dal punto A, si supponga che stando fermo il punto B, e prolungata la linea Ba verso C, la verga AB si giri intorno al centro B, e descriva l'archetto AC. Si tirino, CG verticale, AG orizzontale. Per la similitudine delle due coppie di triangoli ABD, aAC; BAD, CAG abbiamo

$AB : BD :: Aa : AC$

$h : g :: x : \frac{gx}{h} = AC$

$AB : AD :: AC : AG$

$h : f :: \frac{gx}{h} : \frac{fgx}{h^2} = AG$

Il centro E di gravità descrive l'archetto EM. Delineo ML orizzontale, che determina lo

spazio

spazio EL, per cui è verticalmente disceso il punto E, nel quale si suppone concentrato il peso p della verga AB; l'analogia

$$AB : BE :: AG : EM$$
$$m+n : n :: \frac{gx}{h} : \frac{n}{m+n} \cdot \frac{gx}{h}$$

mi dà $EM = \frac{n}{m+n} \cdot \frac{gx}{h}$. Essendo inoltre

$$AB : AD :: EM : EL$$
$$h : g :: \frac{n}{m+n} \cdot \frac{gx}{h} : \frac{n}{m+n} \cdot \frac{g^2x}{h^2}$$

scopro $EL = \frac{n}{m+n} \cdot \frac{g^2x}{h^2}$.

Chiamo F' la forza orizzontale aplicata in A, idonea a frastornare il moto della verga AB. Succederà ciò, quando sia $p.EL = p.\frac{n}{m+n} \cdot \frac{g^2x}{h^2} = F'.AG = F'.\frac{fgx}{h^2}$, onde ne derivi $F' = \frac{n}{m+n} \cdot \frac{pg}{f} = F$; il che [illegible]

Il Sig.r Colonnello Lorgna conviene meco nel determinare la spinta orizzontale del punto B, ma discorda poi nello stabilire la spinta altresì orizzontale del punto A, giudicandola eguale a $\frac{n}{m+n} \cdot \frac{pfg}{h^2}$. Suppongasi $AD = f$ minima, e secondo il Sig.r Lorgna sarebbe $F = \infty$, $F' = 0$. La pressione nulla orizzontale nel punto A non potrebbe impedire il moto di esso punto; e quindi non sussisterebbe il supposto equilibrio. Inoltre ci sia in B un elastro fornito della forza infinita $= \frac{n}{m+n} \cdot \frac{pg}{f}$; non è egli chiaro, che questo spingerà colla predetta forza la verga BA contro il piano AD?

Soluzione II.

Il valore delle forze F, F' si può ancora determinare ponendo in opera i consueti Principj Statici. Le pressioni verticali dei punti B, A stanno in ragione inversa di EB : EA, o sia di n : m. Quindi la pressione in $B = \frac{m}{m+n} \cdot p$, e questa tutta s'impiega a premere il piano

AD

Corollario II.

AD. La pressione verticale in A si eguaglia
ad $\frac{n}{m+n}\cdot p$. Sia $AH = \frac{n}{m+n}\cdot p$, e si compia il pa=
rallelogrammo AQHP. La forza AH si risolve
nelle due, AQ per la direzione della verga,
AP orizzontale, che per tal direzione spinge il
punto A, e si esprime per y'. La similitudine
dei triangoli ADB, HAP mi suggerisce l'ana=
logia $AD : DB :: AH : AP$

$f : g :: \frac{n}{m+n}\cdot p : y'$, da cui ne rac=
colgo come nella prima soluzione $y' = \frac{n}{m+n}\cdot\frac{pg}{f}$.

La forza AQ per la direzione della verga si risolve
anch'essa in due, AH verticale, che accresce la
pressione verticale del punto A, onde si egua=
gli a p, ed $HQ = AP = \frac{n}{m+n}\cdot\frac{pg}{f}$ orizzontale,
che spinge per la direzione DB il punto B, e si
esprime per y.

I punti adunque A, B sono spinti per direzioni
orizzontali contrarie AP, DB dalle forze y', y,
ciascuna delle quali si eguaglia ad $\frac{n}{m+n}\cdot\frac{pg}{f}$;
il che &c.

Proposizione II.

Determinare la spinta orizzontale,
che le due verghe rigide simili ed
eguali AB, AB' (fig. 2.) appoggiate
semplicemente l'una all'altra in A
esercitano contro gli ostacoli in B
e B', che debbono sostenerle.

Questa Proposizione II. non è che un Corollario
della prima. Ciascun ostacolo sosterrà la
spinta orizzontale $= \frac{n}{m+n}\cdot\frac{pg}{f}$, e le due verghe
mutuamente si premeranno nel punto A con
forze orizzontali anch'esse eguali ad
$\frac{n}{m+n}\cdot\frac{pg}{f}$.

Proposizione V.

Data la spinta orizzontale delle verghe AB, AB' (fig. 2) contro le impostature B, B', trovare il valore, e la direzione della forza equivalente.

Si supponga, che il punto A discenda per lo spazio minimo $Aa = x$; e come ho dimostrato nella Proposizione I; i punti B, B' scorreranno gli spazj uguali $Bb = B'b' = \frac{fx}{g}$, quando non siano impediti dagli ostacoli, e le forze orizzontali $T = \frac{n}{m+n} \cdot \frac{pg}{f}$ eserciteranno la somma delle azioni $T.(Bb + B'b') = T. \frac{2fx}{g} = \frac{n}{m+n} \cdot \frac{pg}{f} \cdot \frac{2fx}{g} = 2p \cdot \frac{nx}{m+n} = 2p \cdot EK$, avendo nella citata Proposizione provato $EK = \frac{nx}{m+n}$. Si osservi che $2p.EK$ è la somma delle azioni dei pesi delle due verghe, che si suppongono concentrati in E, E'. Le forze dunque $2T$, $2p$ atte ad effettuare azioni uguali son equivalenti, ed inoltre la forza $2p$ equivalente alle due forze T ha la direzione verticale; il che &c.

Proposizione VI.

Se tra le due verghe AB, AB' (fig. 2) sia inserita una terza verga verticale AD, cui sia annesso un peso P, trovare la spinta orizzontale esercitata da questo sistema di pesi contro le impostature A, A'.

Sia $2q$ il peso della verga AD più quello del grave P. Egli è chiaro, che quando le due forze T agiscono per gli spazj Bb, $B'b'$ ciascuno uguale ad $\frac{fx}{g}$, i due pesi p delle verghe AB, AB' agiscono per gli spazj EK, $E'K$ ognuno $= \frac{nx}{m+n}$, ed il peso $2q$ per lo spazio $Aa = x$. Si otterrà dunque di scoprire il valore della forza T

mediante

Corollario II.

mediante l'equazione $2z \cdot \frac{fx}{g} = 2p \cdot \frac{nx}{m+n} + 2q \cdot x$
che mi dà $z = \frac{g}{f} \cdot \left(\frac{np}{m+n} + q\right) = \frac{n}{m+n} \cdot \frac{pg}{f} + \frac{qg}{f}$.
Posto $m = n$, avremo $z = g \cdot \left(\frac{p+2q}{2f}\right)$, formola
che si accorda con quella trovata dal Sig.^r Lagrange.

Proposizione VII.

Determinare la posizione di quattro verghe inflessibili eguali AB, BC, AB′, B′C′ (Fig. 3.), acciocchè stiano in equilibrio tra di se, e si reggano scambievolmente sopra gli appoggi immobili C, C′, ponendo in opera il Metodo delle Azioni.

Si conducano le rette verticali AD, BT, e le orizzontali BV, CD, e si pongano $CD = g$; $AD = f$, $AB = BC = h$, $AV = z$, $BV = u$, e perciò $CT = g - u$, $DV = f - z$. Il punto A, non potendo muoversi senon per la verticale AD, discenda pel minimo spazio $Aa = x$, ed accaderà che la verga CB si giri intorno al centro C, e che il punto B descriva l'archetto Bb. Di tal misura, onde sia $ab = AB = h$. Si tirino le rette, BH orizzontale, bH verticale, e si stabilisca $BH = y$. La similitudine dei triangoli BTC, BHb mi somministra l'analogia

$BT : TC :: BH : Hb$

$f - z : g - u :: y : \frac{(g-u) \cdot y}{f-z}$, dalla quale ne raccolgo $Hb = \frac{(g-u) \cdot y}{f-z}$. Il centro F di gravità della verga CB la divida, come suppongo, per metà, e perciò esso descriva l'archetto $Ff = \frac{Bb}{2}$, e condotta l'orizzontale FG, e la verticale fG, sarà $Gf = \frac{(g-u) \cdot y}{2(f-z)}$ quello spazio, per cui rangisce il peso p della verga CB, che si concepisce concentrato in F, mentr'essa passa dalla

posizione

posiziona CB alla Cb.

Quando la verga AB si è trasferita nel sito ab, il suo centro E di gravità è passato in e. Si tiri la linea Ee, e descritte le verticali EI, ei, si delineino le orizzontali eK, bM. Chiaramente si vede esser $EI = \frac{AV}{2} = \frac{z}{2}$, $aL = \frac{aM}{2}$. Or aM $= AV - Aa - MV = z - x \left(\frac{-g+u}{f-z}\right)\cdot y$; dunque aL $= \frac{z-x}{2}\ \left(\frac{-g+u}{2\cdot(f-z)}\right)\cdot y$. Ne risulterà per conseguenza $ai = aL + Li = kI = \frac{z-x}{2} + \frac{(g-u)\cdot y}{2(f-z)}$, e quindi $EK = EI - kI = \frac{x}{2} - \frac{gy+uy}{2(f-z)} = \frac{fx - zx - gy + uy}{2\cdot(f-z)}$, e questo è lo spazio, per cui agisce il peso p. della verga AB, il quale si può supporre unito nel centro E di gravità.

Se si ha da formar equilibrio, le mentovate reazione, ed azione hanno da esser uguali, e perciò siamo pervenuti alla equazione $p\cdot\frac{(gy-uy)}{2\cdot(f-z)} = p\cdot\left(\frac{fx - zx - gy + uy}{2(f-z)}\right)$, che mi dà $2gy - 2uy = fx - zx$ (1.)

Poiché $bM = u+y$, $aM = z - x - \frac{gy+uy}{f-z}$, ed $ab = h$, scopriremo $h^2 = u^2 + 2uy + z^2 + 2z\cdot\left(-x - \frac{gy+uy}{f-z}\right)$: ma $(AB)^2 = h^2 = (BV)^2 + (AV)^2 = u^2 + z^2$; dunque $2uy + 2z\cdot\left(-x - \frac{gy+uy}{f-z}\right) = 0$, e ridotto il computo, $(f-z)\cdot x = \frac{fuy - gzy}{z}$. Sostituisco questo valore nella formola (1.), e mi si presenta $2gy - 2uy = \frac{fuy - gzy}{z}$, e dividendo per y, e moltiplicando per z; $3gz - 3uz = fu$ (2.). Per la proprietà dei triangoli rettangoli ABV, ACT scopriremo $h^2 = u^2 + z^2 = g^2 - 2gu + u^2 + f^2 - 2fz + z^2$, e quindi $g^2 - 2gu + f^2 - 2fz = 0$, ovvero $\frac{g^2 - 2gu + f^2}{2f} = z$ (3.). Surrogato un tal valore nella formola (2.), trovo $(3g - 3u)\cdot\left(\frac{g^2 - 2gu + f^2}{2f}\right) = fu$, equazione che si riduce alla seguente $u^2 + \left(\frac{f^2 + 2g^2}{g}\right)\cdot - u = -\frac{3f^2 - 3g^2}{4}$, e supplendo al quadrato $\left(\frac{f^2 + 2g^2}{2g} - u\right)^2 =$

Corollario II.

$= \frac{f^4 + f^2g^2 + g^4}{4g^2}$, ed estraendo la radice

$u = \frac{f^2 + 2g^2 - \sqrt{(f^4 + f^2g^2 + g^4)}}{2g}$.

La formola (3.) mi dà $u = \frac{f^2 + g^2 - 2fz}{2g}$. Fatto uso di questo valore, ne proviene

$z = \frac{-g^2 + \sqrt{(f^4 + f^2g^2 + g^4)}}{2f}$.

Per la qual cosa le quattro verghe staranno in equilibrio, quando ad u, z si assegnino essi scoperti valori; il che &c.

Corollario I.

Sia $CD = g$ minima, e si avrà $\sqrt{(f^4 + f^2g^2 + g^4)} = f^2 + \frac{g^2}{2}$, e quindi $BV = u = \frac{f^2 + 2g^2 - f^2 - \frac{1}{2}g^2}{2g} = \frac{3}{4}g$, e quando $g = 0$, $u = 0$. In questa ipotesi scopriremo $AV = z = \frac{-g^2 + f^2 + \frac{1}{2}g^2}{2f} = \frac{1}{2}f$, il che si accorda col vero; perchè in tal caso le due verghe AB, AC formerebbero una linea retta collocata a piombo, e non potrebbero far moto.

Corollario II.

Fingasi $AD = f$ infinitamente picciola. In questa circostanza abbiamo $\sqrt{(f^4 + f^2g^2 + g^4)} = g^2 + \frac{1}{2}f^2$, e perciò $u = \frac{2g^2 - g^2 - \frac{1}{2}f^2}{2g} = \frac{1}{2}g$; $z = \frac{-g^2 + g^2 + \frac{1}{2}f^2}{2f} = \frac{1}{4}f$, e quando $f = 0$, sarà altresì $z = 0$. Nella presente congiuntura il punto C, che si suppone inammovibile, viene presso, come vedremo nella seguente Proposizione VIII., da una forza orizzontale infinita, e lo stesso dicasi del punto G, e con tal forza altresì si premono vicendevolmente le quattro verghe, e da ciò ne nasce il mutuo loro equilibrio.

Corollario III.

Se suppongasi $AD = f = DC = g$, si troverà $BV = u = \frac{3f - f\sqrt{3}}{2}$, $AV = z = \frac{-f + f\sqrt{3}}{2}$. In tal ipotesi sarà $CT = AV$, $AT = BV$; e quindi $u + z = g = f$.

Corollario IV.

Facciasi $g = kf$, e si scoprirà $u = f\cdot\left(\frac{2k^2+1-\sqrt{(1+k^2+k^4)}}{2k}\right)$, $z = f\cdot\left(\frac{-k^2+\sqrt{(1+k^2+k^4)}}{2}\right)$. Sia per esempio $k=2$, e si troverà $u = f\cdot\left(\frac{9-\sqrt{(21)}}{4}\right)$, $z = f\cdot\left(\frac{-4+\sqrt{(21)}}{2}\right)$:

Corollario V.

E siccome ognuna delle verghe è $= h = \sqrt{(u^2+z^2)}$, scopriremo $h = \sqrt{\left(\left(\frac{f^2+2g^2-\sqrt{(f^4+f^2g^2+g^4)}}{4g^2}\right)^2 + \left(\frac{-g^2+\sqrt{(f^4+f^2g^2+g^4)}}{4f^2}\right)^2\right)}$; ossia fatti i necessarj computi $h = \left(\frac{f^2+g^2}{2fg}\right)\cdot\sqrt{(2f^2+2g^2-2\sqrt{(f^4+f^2g^2+g^4)})}$: Il Sig. Col. Lorgna determina $h =$
$\sqrt{\left(\frac{g^4}{2f^4}+\frac{f^4}{4g^4}+\frac{f^2+2g^2+5}{4}+\frac{f^2}{4g^2}-\left(\frac{g^2}{2f^2}+\frac{f^2}{g}+g\right)\cdot\sqrt{(f^4+f^2g^2+g^4)}\right)}$
E' quì corso uno sbaglio di calcolo. Egli è manifesto, che posta $CD = g$ minima, esser deve $h = \frac{f}{2}$. In tal caso abbiamo $\sqrt{(f^4+f^2g^2+g^4)} = \frac{f^2+g^2}{2}$. Sostituito questo valore nella mia formola si trova rettamente $h = \frac{f}{2}$. Non così succede nella formola del nostro Autore, la quale allontanandosi dal giusto mi dà $h = \frac{f^2}{2g^2} = \infty$.

Soluzione II.

Cerco il valore della forza T, ch'essendo applicata in B per la direzione AQ normale alla verga AC, eserciti la reazione $T.Ab$, che sia uguale a quella $p\cdot Gf$ del peso p della verga predetta, e possa in sua vece sostituirsi. Avremo dunque $T.Ab = p\cdot Gf$: ma come ho dimostrato $Gf = \frac{gy-uy}{2\cdot(f-z)}$, e per la similitudine dei triangoli TAC, HAb, $TA : AC :: HB : Ab$
$f-z : h :: y : \frac{hy}{f-z}$;
dunque $Ab = \frac{hy}{f-z}$. Per la qual cosa avremo $T.\frac{hy}{f-z} = p\cdot\frac{(gu-uy)}{2\cdot(f-z)}$, e fatte le debite operazioni $T = p\cdot\frac{(g-u)}{2h}$

Andiamo

Corollario II.

Andiamo ora in traccia del valore della forza Z', che si applichi in B per la direzione contraria BP normale alla verga BC, ed eserciti l'azione $Z'\cdot Bb$, che si agguagli a quella $p\cdot EK$ del peso p della verga AB, e possa surrogarsi in suo luogo. Sarà pertanto $Z'\cdot Bb = p\cdot EK$, e ponendo in cambio di Bb, e di EK i loro valori, il secondo dei quali è stato da me determinato nella prima Soluzione, $Z'\cdot\frac{hy}{f-x} = p\cdot\left(\frac{fx-zx-gy+uy}{2\cdot(f-z)}\right)$. Ho scoperto nella predetta Soluzione $fx - zx = \frac{fuy - g^2y}{2}$. Sostituito questo valore, ci si presenterà $\frac{Z'\cdot hy}{f-z} = \frac{p}{2\cdot(f-z)}\cdot\left(\frac{fu-g^2}{2} - g + u\right)\cdot y$; e quindi $2Z'hz = p\cdot(fu + uz - 2gz)$. Ma ho altresì trovato $z = \frac{g^2 - 2gu + f^2}{2f}$, ed essendo per la penultima formola $(2Z'h - pu + 2pg)\cdot z = pfu$, scopriremo $(2Z'h - pu + 2pg)\cdot\left(\frac{g^2-2gu+f^2}{2f}\right) = pfu$; ossia ridotto il computo, $Z' = p\cdot\left(\frac{-2gu^2 + (5g^2+3f^2)\cdot u - 2g^3 - 2gf^2}{2h\cdot(g^2-2gu+f^2)}\right)$. Se le quattro verghe hanno da stare in equilibrio, il punto B non dee muoversi, il che succederà se $Z = Z'$, onde si abbia

$$p\cdot\left(\frac{g-u}{2h}\right) = p\cdot\left(\frac{-2gu^2 + (5g^2+3f^2)\cdot u - 3g^3 - 2gf^2}{2h\cdot(g^2-2gu+f^2)}\right),$$

e conseguentemente $4gu^2 + (4g^2+4f^2)\cdot u = 3f^2g - 3g^3$, e quindi come sopra

$$u = \frac{f^2 + 2g^2 - \sqrt{(f^4 + f^2g^2 + g^4)}}{2g},$$

$$z = \frac{-g^2 + \sqrt{(f^4 + f^2g^2 + g^4)}}{2f}.$$

Il ch. Sig.r Col. Lorgna determina alla pag. 29.

$Z = p\cdot\left(\frac{g-u}{2h}\right)$, $Z' = (u\cdot(f-z) - z\cdot(g-u))\cdot\left(\frac{pz}{h} + \frac{pu^2}{2hz}\right) - \left(\frac{z\cdot(f-z) + u\cdot(g-u)}{h^2}\right)\cdot\frac{pu}{2h}$. La prima formola è affatto simile alla mia, e la seconda

facilmente

facilmente riducesi a quella, a cui dal Metodo delle Azioni sono stato condotto. Stabilisce egli $u = \frac{1}{2g}\cdot(f^2 \mp g^2 + \sqrt{(f^4+f^2g^2+g^4)})$

$$z = \frac{-g^2}{2f} \pm \frac{1}{2f}\sqrt{(f^4+f^2g^2+g^4)}$$

Nel valore di u c'è un errore di stampa, dovendo essere $u = \frac{1}{2g}\cdot(f^2+2g^2 \mp \sqrt{(f^4+f^2g^2+g^4)})$. Inoltre al presente Problema non servono i segni inferiori delle due radici.

Proposizione VIII.

Posto che le quattro verghe AB, AC, AB', A'C' (fig. 4.) stiano mutuamente in equilibrio, trovare lo sforzo, che esse esercitano in direzione orizzontale contro gli appoggi C, C'.

Suppongo, che i centri di gravità E, F delle verghe regolari, omogenee, ed ugualmente lunghe AB, CB cadano nelle loro metà, e che per conseguenza sia EF parallela ad AC, la quale verrà tagliata a squadra, e per metà nel punto G centro di gravità dell'aggregato delle due verghe dalla linea BH normale ad AC. Sia $AD = f$, $CD = g$, $AC = \sqrt{(f^2+g^2)}$, $AH = CH = \frac{\sqrt{(f^2+g^2)}}{2}$, $BV = u$, $AV = z$, $AB = BC = h$, $\sqrt{((AB)^2 - (AH)^2)} = BH = \sqrt{(h^2 - \frac{f^2+g^2}{4})}$.

La similitudine dei triangoli DCA, HGK mi suggerisce l'analogia

$$CD : CA :: GH = \tfrac{1}{2}BH : GK$$

$$g : \sqrt{(f^2+g^2)} :: \frac{\sqrt{(4h^2-f^2-g^2)}}{4} : \frac{\sqrt{(4h^2(f^2+g^2)-f^4-2f^2g^2-g^4)}}{4g},$$

che mi dà $GK = \frac{\sqrt{(4h^2(f^2+g^2)-f^4-2f^2g^2-g^4)}}{4g}$. Inoltre abbiamo $\sqrt{((GK)^2-(GH)^2)} = KH = \frac{\sqrt{((4h^2-f^2-g^2)\cdot f^2)}}{4g} = \frac{f}{4g}\sqrt{(4h^2-f^2-g^2)}$, e conseguentemente $CH - KH = CK = \frac{\sqrt{(f^2+g^2)}}{2} - \frac{f}{4g}\sqrt{(4h^2-f^2-g^2)}$. Dalla

simiglianza

Corollario II.

similitudine dei triangoli ACD, KCI ne raccolgo

CA : AD :: CK : KI

$\sqrt{(f^2+g^2)} : f :: \frac{\sqrt{(f^2+g^2)}}{2} - \frac{f}{4g}\sqrt{(4h^2-f^2-g^2)} :$

$\frac{f}{2} - \frac{f^2\sqrt{(4h^2-f^2-g^2)}}{4g\cdot\sqrt{(f^2+g^2)}} = KI$. Il perchè avremo

$GI = GK + KI = \frac{\sqrt{(4h^2-f^2-g^2)}\cdot\sqrt{(f^2+g^2)}}{4g} - \frac{f^2\sqrt{(4h^2-f^2-g^2)}}{4g\sqrt{(f^2+g^2)}}$

$+\frac{f}{2} = \frac{g\sqrt{(4h^2-f^2-g^2)}}{4\sqrt{(f^2+g^2)}} + \frac{f}{2}$.

Alle due verghe AB, BC sia applicata la verga AC priva di materia, e di gravità, la quale impedisca qualunque alterazione nell'angolo ABC. Si levi ora l'impedimento in C, e ne nasca un minimo moto. Dovendo il punto A necessariamente discendere per la verticale AD, percorra esso lo spazio infinitesimo $Aa = x$, ed accaderà, come nella precedente Proposizione I. ho già dimostrato, che il punto C viaggi per lo spazio minimo orizzontale $Cc = \frac{fx}{g}$. Le linee ac, ah, ch, bh, bg, gh saranno uguali alle linee segnate colla lettera majuscola, e resteranno soltanto modificate le linee $aD = f-x$, $Dc = g+\frac{fx}{g} = \frac{g^2+fx}{g}$, e le altre parimente, che da queste dipendono. Cerco il valore della retta gi collo stesso metodo usato in riguardo alla retta GI.

La similitudine dei triangoli Dca, hgk determina l'analogia

cD : ca :: gh : gk

$\frac{g^2+fx}{g} : \sqrt{(f^2+g^2)} :: \frac{\sqrt{(4h^2-f^2-g^2)}}{4} : \frac{g\sqrt{(4h^2-f^2-g^2)}\cdot\sqrt{(f^2+g^2)}}{4\cdot(g^2+fx)} = gk$.

Ma $\sqrt{((gk)^2-(gh)^2)} = kh$; dunque $kh =$

$\sqrt{\left(\frac{g^2(4h^2-f^2-g^2)\cdot(f^2+g^2)}{16\cdot(g^2+fx)^2} - \frac{4h^2-f^2-g^2}{16}\right)} = \frac{\sqrt{((f^2g^2-2g^2fx)\cdot(4h^2-f^2-g^2))}}{4\cdot(g^2+fx)}$

e perciò $ch - kh = ck = \frac{\sqrt{(f^2+g^2)}}{2} - \frac{\sqrt{(f^2g^2-2g^2fx)\cdot(4h^2-f^2-g^2))}}{4\cdot(g^2+fx)}$.

Poichè

Poichè x è quantità minima, scopriremo $\sqrt{(f^2g^2 - 2g^2fx)} = fg - gx$, e conseguentemente $ck = \frac{\sqrt{(f^2+g^2)}}{2} - \frac{(fg-gx)\cdot\sqrt{(4h^2-f^2-g^2)}}{4(g^2+fx)}$. I triangoli simili caD, cki mi suggeriscono l'analogia

$$ca : aD :: ck :$$
$$\sqrt{(f^2+g^2)} : f-x :: \frac{\sqrt{(f^2+g^2)}}{2} - \frac{(fg-gx)\sqrt{(4h^2-f^2-g^2)}}{4(g^2+fx)} :$$
$$ki$$

$\frac{f-x}{2} - \frac{g(fg-gx)^2\cdot\sqrt{(4h^2-f^2-g^2)}}{4(g^2+fx)\cdot\sqrt{(f^2+g^2)}} = ki$ ~~ultimo triangolo~~ ~~simile~~ $= \frac{f-x}{2} - \frac{g\cdot(f^2-2fx)\cdot\sqrt{(4h^2-f^2-g^2)}}{4\cdot(g^2+fx)\cdot\sqrt{(f^2+g^2)}}$. Si inferisca essere $gi = gk + ki = \frac{g\sqrt{(f^2+g^2)}\cdot\sqrt{(4h^2-f^2-g^2)}}{4\cdot(g^2+fx)}$
$- \frac{g\cdot(f^2-2fx)\cdot\sqrt{(4h^2-f^2-g^2)}}{4\cdot(g^2+fx)\cdot\sqrt{(f^2+g^2)}} + \frac{f-x}{2} = \frac{(g^3+2fgx)\sqrt{(4h^2-f^2-g^2)}}{4\cdot(g^2+fx)\cdot\sqrt{(f^2+g^2)}}$
$+ \frac{f-x}{2}$.

Trovati i valori di Gl, gi, si renda nota la loro differenza $Gl - gi = \frac{g\sqrt{(4h^2-f^2-g^2)}}{4\sqrt{(f^2+g^2)}} + \frac{f}{2}$
$\frac{(-g^3-2fgx)\sqrt{(4h^2-f^2-g^2)}}{4\cdot(g^2+fx)\cdot\sqrt{(f^2+g^2)}} - \frac{f-x}{2} = \frac{x}{2} - \frac{fx\sqrt{(4h^2-f^2-g^2)}}{4g\sqrt{(f^2+g^2)}}$,
ch'è quello spazio, per cui agisce il peso $2p$ delle due verghe AA, AC. Reagendo la forza orizzontale Z dell'ostacolo C per lo spazio $Cc = \frac{fx}{g}$, ed avendosi da conservar l'equilibrio, si deve avvere l'equazione $Z\cdot\frac{fx}{g} = 2p\cdot\left(\frac{x}{2} - \frac{fx\sqrt{(4h^2-f^2-g^2)}}{4g\sqrt{(f^2+g^2)}}\right)$, da cui si deduce il cercato valore di $Z = p\cdot\frac{(2g\sqrt{(f^2+g^2)} - f\sqrt{(4h^2-f^2-g^2)})}{2f\sqrt{(f^2+g^2)}}$.

Si intenda ora applicata la forza Z al punto C per la direzione CD, e nello stesso momento levata la verga AC; io dico che sussisterà l'equilibrio. Imperocchè il vero l'angolo AAC non può variarsi; perchè per la Prop. VII. i pesi delle due verghe AA, AC eserciterebbero azioni eguali e contrarie, che mutuamente s'impediscono. Resta dunque

Corollario II.

dunque che si tenti il moto nella presente Prop. supposta; ma questo viene frastornato dalla forza 7; dunque si mantiene il ricercato equilibrio, e le verghe $AA, AC, AA', A'C'$ contro gli appoggi C, C' fanno lo sforzo $= 7$ in direzione orizzontale; il che &c.

Corollario I.

Posta $CD = g = 0$, ne risulta $h = \frac{f}{2}$, $4h^2 = f^2$; e dalla nostra formola rettamente deducesi $7 = 0$; perché in tal caso le due verghe sono situate verticalmente in linea retta, ed il peso $2p$ per conseguenza non può cagionare forza orizzontale.

Corollario II.

Se $AD = f = 0$, o meglio infinitamente piccola, onde ne provenga $h = \frac{g}{2} + \frac{f^2}{2g}$, si trova $7 = \infty$. In questa circostanza formando le due verghe AA, AC un angolo AAC immensamente prossimo a due retti, si richiede una forza infinita 7, acciocché reagendo per lo spazio $\frac{fx}{g}$ infinitesimo del secondo grado, faccia equilibrio col peso $2p$, che agisca per lo spazio $GI - gi = \frac{x}{2}$ infinitesimo del primo grado.

Scolio I.

Il nostro celebre Autore perviene alla formola assai più composta della mia $7 =$ $(g-u) \cdot \left(\frac{A}{h} - \frac{p \cdot}{2h^2}(f-z)\right)$, nella quale $A =$ $\left(\frac{z \cdot (f-z)}{h^2} + \frac{u \cdot (g-u)}{h^2}\right) \cdot \left(\frac{pz}{h} + \frac{pu^2}{2h^2}\right) + \left(\frac{fu - gz}{h^2}\right) \cdot \left(\frac{pu}{2h}\right)$ $+ p\left(\frac{f-z}{h}\right)$. Ma ciò che merita maggior considerazione si è, che colla mia non si accorda, che per altro ho dedotta da principj innegabili.

Scolio II.

Per dar compimento alla Prop. VIII., primieramente cerca lo sforzo, che le due verghe AB, BC (Fig. 5.) esercitano in direzione orizzontale contro il punto A. Rimettasi come sopra la verga AC priva d'inerzia, e di gravità, onde non possa variarsi l'angolo AAC, e si supponga, che stando fermo il punto C, segnata $Aa = x$, e prolungata la linea Ca verso O, la linea CA si giri intorno al centro C, e descriva l'archetto AO. Si tirino ON verticale, AN orizzontale. Ho dimostrato nella Prop. I. $AO = \frac{gx}{\sqrt{(f^2+g^2)}}$, $AN = \frac{fgx}{f^2+g^2}$; e quindi chiamata φ la forza, che spinge per la direzione NA, sarà $\varphi \cdot \frac{fgx}{f^2+g^2}$ la sua reazione, la quale esser dee uguale all'azione del peso zp delle due verghe, che si suppone unito nel centro G di gravità d'esse verghe.

Se la retta CA descrive l'arco $AO = \frac{gx}{\sqrt{(f^2+g^2)}}$, la retta $CG = \sqrt{((CH)^2+(GH)^2)} = \sqrt{\left(\frac{f^2+g^2}{4} + \frac{4h^2-f^2-g^2}{16}\right)} = \frac{\sqrt{(3f^2+3g^2+4h^2)}}{4}$ descriverà l'arco GM, che verrà determinato dalla seguente analogia

$$AC : AO :: CG : GM$$

$$\sqrt{(f^2+g^2)} : \frac{gx}{\sqrt{(f^2+g^2)}} :: \frac{\sqrt{(4h^2+3f^2+3g^2)}}{4} : \frac{gx\sqrt{(4h^2+3f^2+3g^2)}}{4\cdot(f^2+g^2)}$$

$= GM$. La similitudine dei triangoli GCI, MGL mi somministra l'analogia $CG : CI :: GM : GL$, che stabilisce $GL = \frac{CI \cdot GM}{CG}$. ma $\frac{GM}{CG} = \frac{AO}{AC}$, dunque $GL = \frac{CI \cdot AO}{AC}$. Ora $CI = \sqrt{((CG)^2-(GI)^2)}$, $(CG)^2 = \frac{4h^2+3f^2+3g^2}{16}$; $(GI)^2 = \frac{f^2}{4} + \frac{fg\sqrt{(4h^2-f^2-g^2)}}{4\cdot\sqrt{(f^2+g^2)}} + \frac{g^2(4h^2-f^2-g^2)}{16\cdot(f^2+g^2)}$; dunque

Corollario II.

ridotto il computo, $CI = \sqrt{\left(\frac{4f^2h^2 - f^4 + 3f^2g^2 + 4g^4}{16\cdot(f^2+g^2)} - \frac{fg\sqrt{(4h^2-f^2-g^2)}}{4\sqrt{(f^2+g^2)}}\right)}$

Avremo pertanto YG [illegible] $= \frac{CI \cdot AO}{AC} =$

$\sqrt{\left(\frac{4f^2h^2 - f^4 + 3f^2g^2 + 4g^4}{16\cdot(f^2+g^2)} - \frac{fg\sqrt{(4h^2-f^2-g^2)}}{4\sqrt{(f^2+g^2)}}\right)} \cdot \frac{gx}{f^2+g^2}$; e

poichè $\frac{Z' \cdot fgx}{f^2+g^2} =$

$2p \cdot \frac{\sqrt{(4f^2h^2 - f^4 + 3f^2g^2 + 4g^4 - 4fg\sqrt{(f^2+g^2)}\cdot\sqrt{(4h^2-f^2-g^2)})}}{4\sqrt{(f^2+g^2)}} \cdot \frac{gx}{f^2+g^2}$,

ne risulta $Z' = \frac{p\sqrt{(4f^2h^2 - f^4 + 3f^2g^2 + 4g^4 - 4fg\sqrt{(f^2+g^2)}\cdot\sqrt{(4h^2-f^2-g^2)})}}{2f\sqrt{(f^2+g^2)}}$

$= \frac{p\sqrt{(4g^2f^2 + 4g^4 - 4fg\sqrt{(4h^2-f^2-g^2)} + 4f^2h^2 - f^4 - f^2g^2)}}{2f\sqrt{(f^2+g^2)}}$

ed estraendo la radice

$Z' = p \cdot \frac{(2g\sqrt{(f^2+g^2)} - f\sqrt{(4h^2-f^2-g^2)})}{2f\sqrt{(f^2+g^2)}}$

Immaginiamoci, che la forza Z' sia applicata al punto A per la direzione NA, e levata nello stesso istante la verga AC, affermo che sussisterà l'equilibrio; imperciocchè l'angolo ABC non può variarsi, impedendosi vicendevolmente le azioni eguali, e contrarie per la Prop. VII., ch'eserciterebbero le parti delle due verghe. Rimane dunque che si tenti il moto nella presente Prop. supposto; ma questo viene impedito dalla forza Z'; dunque si conserva l'equilibrio, e le verghe CB, BA; CB, BA contro il punto A fanno lo sforzo Z' in direzione orizzontale, e contraria; il che &c.

Corollario.

I due valori eguali di Z, Z' c'insegnano, che dalle verghe AB, BC il punto A, e l'ostacolo C vengono contrariamente spinti con pari forze orizzontali: il che parimente si avvera ~~dell'ostaco~~ del punto A, e dell'ostacolo C' per opera delle verghe AB', B'C.

Scolio III.

Scolio III.

Indago in secondo luogo gli sforzi Z'', che le due verghe AB, AC (Fig. 3.) esercitano in direzione orizzontale contro il punto B, ed altresì le due verghe AB', B'C contro il punto B'. Ho dimostrato nella Prop. VII, che il peso p della verga BC reagisca per lo spazio $Gf = \frac{(g-u)\cdot y}{z\cdot(f-z)}$, onde la sua reazione si agguagli a $p\cdot\frac{(g-u)\cdot y}{z\cdot(f-z)}$. Nel tempo stesso la forza Z'', che spinge da B verso H, agisca per lo spazio $BH = y$. Se si ha da conservar l'equilibrio, le predette reazione, ed azione hanno da esser uguali, e perciò ci si presenta l'equazione $\frac{p\cdot(g-u)\cdot y}{z(f-z)} = Z''\cdot y$; che determina $Z'' = \frac{p\cdot(g-u)}{z(f-z)}$. Ho provato parimente nel luogo citato, che il peso p della verga AB agisce per lo spazio $EK = \frac{fx-zx-gy+uy}{z\cdot(f-z)} = \frac{(g-u)\cdot y}{z(f-z)}$, e che per conseguenza la sua azione si eguaglia a $\frac{p\cdot(g-u)\cdot y}{z\cdot(f-z)}$. Nel medesimo tempo la forza Z'', che spinge da H verso B, reagisce per lo spazio $BH = y$, e dovendo sussistere l'equilibrio, le mentovate azione, e reazione debbono pareggiarsi, donde ché ne provenga come sopra $\frac{p\cdot(g-u)\cdot y}{z\cdot(f-z)} = Z''\cdot y$, e quindi $Z'' = \frac{p\cdot(g-u)}{z\cdot(f-z)}$. In cambio di u, e di z sostituisco i loro valori scoperti nella detta Prop., ed effettuati gli opportuni calcoli; ne risulta $Z'' = p\cdot\frac{(-f^3+f\surd(f^4+f^2g^2+g^4))}{2f^2g+zg^3-zg\surd(f^4+f^2g^2+g^4)}$

Corollario I.

Posta CD = g minima, e fatta la riflessione essere $\surd(f^4+f^2g^2+g^4) = f^2+\frac{g^2}{2}$ nella predetta ipotesi, scopriremo, ridotto che sia il computo, $Z'' = \frac{pg}{4f}$: e quando $g = 0$; sarà $Z'' = 0$.

Corollario II.

Corollario II.

Posta AD $= f$ minima, ed essendo in tal caso $\sqrt{(f^4+f^2g^2+g^4)} = g^2+\frac{f^2}{2}$, scopriremo, espurgata che sia l'equazione $Z'' = \frac{pg}{3f} = cc$.

Scolio IV.

Se qualcuno mi ricercasse il perchè la forza Z'' non si eguagli alla Z, Z', gli risponderei nascere tale disuguaglianza da ciò, che queste traggono l'origine dall'azione impedita dai pesi di amendue le verghe AB, AC, e quella dall'azione impedita dal peso dall'una, o dall'altra verga. Ho trovata la forza $Z = Z' = p\cdot\left(\frac{2g\sqrt{(f^2+g^2)} - f\sqrt{(4h^2-f^2-g^2)}}{2f\sqrt{(f^2+g^2)}}\right)$. In cambio di h sostituisco il suo valore determinato nella Prop. VII., e ne proviene dopo le necessarie operazioni $Z = Z' = p\cdot\frac{2g^2-\sqrt{(2f^4+3f^2g^2+2g^4+(-2f^2-2g^2)\sqrt{(f^4+f^2g^2+g^4)})}}{2fg}$.

Secondochè si suppone g, o f minima, si trova nella prima ipotesi $Z = \frac{pg}{2f}$, e nella seconda $Z = \frac{pg}{f}$: ma nella prima supposizione $Z'' = \frac{pg}{4f}$ pel Cor. I., e nella seconda $Z'' = \frac{pg}{3f}$ pel Cor. II.; dunque nei casi estremi $Z > Z''$. Lo stesso si avvera nel caso medio di $f = g$, il quale mi dà $Z = p\cdot\left(\frac{2-\sqrt{(7-4\sqrt{3})}}{2}\right) > Z'' = p\cdot\frac{(-1+\sqrt{3})}{6-2\sqrt{3}}$.

Proposizione IX.

Determinare generalmente la posizione di quattro verghe inflessibili qualunque AA, AC, A'A', A'C' di diverso peso qualsivoglia, perchè stiano in equilibrio fra loro. (Fig. 3.)

Conservando i medesimi principj della Prop. VII., e le comuni denominazioni, sia AD $= f$, CD $= g$; la lunghezza della verga AA $= h$, quella della verga AC $= h'$; AV $= z$, AV $= u$; il peso della prima

prima $= p$; quello della seconda $= p'$. Sarà per conseguenza $VD = AT = f-z$; $CT = g-u$. Pongo inoltre le due minime lineette $Aa = x$, $AH = y$. Ho scoperto nella Prop. VII. la reazione del peso p' della verga BC $= p' \cdot Hb = \frac{p' \cdot (g-u) \cdot y}{2(f-z)}$, e l'azione del peso p della verga AB $= p \cdot (\frac{(f-z) \cdot x \ (-g+u) \cdot y}{2 \cdot (f-z)})$. Se si ha da dar l'equilibrio, la nominata reazione, ed azione debbono eguagliarsi, e vicendevolmente impedirsi, onde si avverà l'equazione $\frac{p' \cdot (g-u) \cdot y}{2(f-z)} = p \cdot (\frac{(f-z) \cdot x \ (-g+u) \cdot y}{2 \cdot (f-z)})$, ossia $p' \cdot (g-u) \cdot y = p \cdot ((f-z) \cdot x \ (-g+u) \cdot y)$ (1.). Abbiamo altresì le due equazioni $(AV)^2 + (BV)^2 = (AB)^2$, $(bM)^2 + (aM)^2 = (ab)^2 = (AB)^2$; cioè analiticamente $z^2 + u^2 = h^2$ (2.), $u^2 + 2uy + z^2 + 2z(-x - \frac{gy+uy}{f-z}) = h^2$, e quindi essendo $u^2 + z^2 = h^2$, ridotto il computo, $(f-z) \cdot x = \frac{fuy - gzy}{z}$. Sostituisco un tal valore nella formola (1.), e mi si presenta dopo aver moltiplicato per z, e diviso per y, $p' \cdot (gz - uz) = p \cdot ((f+z) \cdot u - 2gz)$ (3.). Abbiamo inoltre la formola $(BT)^2 + (CT)^2 = (BC)^2$, o analiticamente $f^2 - 2fz + z^2 + g^2 - 2gu + u^2 = h'^2$ (4.).

Riflettasi, che le tre formole (2.), (3.), (4.) contengono quattro incognite h, h', u, z, e che perciò il Problema ammette infinite soluzioni, siccome indeterminato, e locale. Si cangerà esso in determinato, supponendo per esempio nota la lunghezza $= h$ della verga AB. In tal ipotesi la formola (2.) mi dà $\sqrt{(h^2 - u^2)} = z$, $\sqrt{(h^2 - z^2)} = u$. Sostituisco questi valori nelle due formole $\frac{pfu}{p'g + 2pg - pu - pu} = z$, $\frac{(p'g + 2pg) \cdot z}{p'f + pz + p'z} = u$, che si deducono dalla formola (3.), e ne nascono l'equazioni $\sqrt{(h^2 - u^2)} = \frac{pfu}{p'g + 2pg - pu - pu}$ (5.)

$$V(h^2-z^2) = \frac{(p'g+2pg).z}{pf+pz+p'z} \quad (6.)$$ appartenente al quarto grado, dalla risoluzione delle quali vengono determinati i valori di u, e di z. Stabiliti questi, si trova per la formola (4) il valore di h'.

I valori delle tre incognite u, z, h' si determinano con eleganza costruendo geometricamente le due formole (2.) e (3.). La formola (2.) $z^2+u^2=h^2$ è patentemente al circolo; la formola (3.) $p'z.(g-u) = p.((f-z).u-2gz)$ si costruisce agevolmente col mezzo delle iperbola fra gli assintoti. Insegnandoci il calcolo essere $pfu =$ $(p'g+2pg-p'u-pu).z$, pongo $p'=np$, e dividendo per p, trovo $fu=((n+2).g-(n+1).u).z$ (7.) Faccio $(n+2).g-(n+1).u = (n+1).t$, e quindi $\left(\frac{n+2}{n+1}\right).g - t = u$ (8.) Avremo pertanto surrogando nel primo membro della equazione (7.) $\left(\frac{n+2}{n+1}\right).g - t$ in cambio di u, e nel secondo $(n+1).t$ in cambio di $(n+2).g-(n+1).u$, $f\left(\left(\frac{n+2}{n+1}\right).g-t\right) = (n+1).tz$, e perciò $fg\left(\frac{n+2}{n+1}\right) = \left(\frac{f}{n+1}+z\right).(n+1).t$ (9.), equazione all'iperbola fra gli assintoti.

Nella orizzontale CC' (fig. 6.) taglio DC = DC' = g, e nella verticale DE, DA = f, $DE = \left(\frac{n+2}{n+1}\right)f$, onde ne risulta $AE = \frac{f}{n+1}$. Dal punto E tiro la retta GEF parallela a CC', e segnata $DH = \left(\frac{n+2}{n+1}\right).g = g + \frac{g}{n+1}$, conduco pel punto H la linea HG parallela a DE, ed indi fra gli assintoti EF, ED descrivo l'iperbola C'M^{R}N, che passi pel punto dato C'. Posta AL = z, sarà $EL = \frac{f}{n+1}+z$, e per l'equazione (9.) all'iperbola, l'ordinata $LM = (n+1).t$. Essendo $IL = \left(\frac{n+2}{n+1}\right)g$, tagliata IK = t, resta LK = u per l'equazione (8.).

Determino similmente altri valori delle coordinate

z, u,

i segmenti esemplificati AV, VB, e per punti B, K &c. delineo la curva ABKC, che passerà per i punti A, C, la quale replico in AB'K'C, e descritto poscia col raggio AP = h il semicircolo QBPB'Q', taglierà essa la curva CKBAB'K'C nei punti B, B'. Tirate le corde AB, AB', BC, B'C, sarà CBAB'C la posizione delle quattro verghe richiesta dall'equilibrio, ed inoltre AB = AB' = h, BC = B'C = h'. Tralascio la dimostrazione, che facilmente si ottiene le pedate dell'Analisi ricalcando.

Corollario I.

Sia $f = 0$, e la formola (5.) rettamente determina $u = h$, e per conseguenza $h' = g - h$.

Corollario II.

Supposta $g = 0$, impariamo dalla formola (6.) essere giustamente $z = h$, e quindi $h' = f - h$.

Scolio I.

Il Sig. Col. Lorgna perviene alla formola $-2p'gz^3 + 2p'fuz^2 + p'fu^3 - pfuz^2 + puz^3 - pgu^2z + pu^3z - p'gh^2z + p'h^2uz = 0$, la quale sostituito il valore $u^2 + z^2$ in cambio di h^2, si riduce alla seguente $-2p'gz^3 + 2p'fuz^2 + p'fu^3 - pfuz^2 + puz^3 - pgu^2z + pu^3z - p'gu^2z - p'gz^3 + p'u^3z + p'uz^3 = 0$. Se questa si paragonerà colla mia formola (3.) ridotta al nulla $pfu + puz - 2pgz - p'gz + p'uz = 0$, si comprenderà, che non vanno d'accordo. La mia cavatamente è giusta, e mi serve di prova, che nell'ipotesi di $p = p'$, di $h = h'$, e di $u = \frac{g}{2}$, ne risulta $z = \frac{f}{4}$, come appunto ho ritrovato nel Cor. II. della Prop. VII., il quale supponendo f minima, stabilisce $u = \frac{g}{2}$, $z = \frac{f}{4}$. Nelle stesse supposizioni dividendo per $p = p'$ la formola del Sig. Lorgna, cancellando i termini infinitesimi del terzo grado, e ponendo $u = \frac{g}{2}$,

scopriremo

340

scoprivamo $\frac{fg^3}{6} - \frac{g^3 z}{4} + \frac{g^3 z}{6} - \frac{g^3 z}{4} + \frac{g^3 z}{6} = 0$; formola chi espurgata mi dà $z = \frac{f}{2}$, e non $z = \frac{f}{4}$, come la VII. Prop. richiede.

Scolio II.

La curva $CKBAA'B'K'C'$ è il luogo di tutti i punti di equilibrio, secondo la varia lunghezza, che si assegnano alle verghe $AB = AB'$, $BC = B'C'$, restando invariati gli elementi f, g, p, p'. Scelto il raggio AP = h, che sta dentro i limiti del nulla, e della diagonale $AC = AC'$, il semicircolo $QAPA'Q'$ taglierà la detta curva in due punti B, B', e ci darà la posizione, e le lunghezze $AB = AB'$, $BC = B'C'$ delle quattro verghe mutuamente bilanciate.

Scolio III.

Se fosse data di lunghezza, e di posizione la verga Ab, il cui peso p, si determinerebbe facilmente la lunghezza, e la posizione della bc fornita del peso $p' = np$. Si prolunghi l'orizzontale Vb da una parte sino in O, e dall'altra sino in R, e si faccia

$VB : BO :: Vb : bo$

$u : t :: ku : kt = bo$

$AO : bo :: VR : Vr$

$t : kt :: (n+1) \cdot t : (n+1) \cdot kt = Vr$

$VR : Vr :: DC' : Dc'$

$(n+1) t : (n+1) kt :: g : kg = Dc'$

Descritta poscia per gli assintoti ED, EF l'iperbola $n \times m c'$, che passi pel punto v, interseccherà essa la retta CC' nel punto c', qualmente è agevole a dimostrarsi. Taglio $Dc = Dc'$, e tirata la linea bc, ne risulta la lunghezza bc, e la posizione della verga bc, il cui peso $p' = np$.

Essendo per la formola (6.) $\left(\frac{n+2}{n+1}\right) g - t = u$, e per la

la formola (9.) $fg\cdot\left(\frac{n+2}{n+1}\right) = \left(\frac{f}{n+1}+2\right)\cdot(n+1)\cdot t$, avremo parimente $\left(\frac{n+2}{n+1}\right)\cdot kg - kt = ku$; $fkg\left(\frac{n+2}{n+1}\right) = \left(\frac{f}{n+1}+2\right)\cdot(n+1)\cdot kt$. La costruzione di queste due ultime formole ci somministra la curva di equilibrio $ckbAb'k'c'$, che passa pel punto dato b, e conservando la lunghezza, e la posizione della verga Ab, il cui peso p, determina la lunghezza, e la posizione della verga bc, il cui peso $p' = np$, come dovea dimostrarsi.

Scolio IV.

Non riuscirà molto difficile il determinare l'espressione della forza orizzontale T', che per la direzione NA (Fig. 7.) respinge il punto A, alla quale si agguaglia la forza T dall'ostacolo C. Fatta la preparazione come nella Fig. 5., e posta $Aa = x$, ho dimostrato nella Prop. I. essere $AO = \frac{gx}{\sqrt{(f^2+g^2)}}$, $AN = \frac{fgx}{f^2+g^2}$, e perciò sarà $T\cdot\frac{fgx}{f^2+g^2}$ la reazione della forza T', che dee pareggiare l'azione del peso $p+p' = p+np = (n+1)\cdot p$ delle due verghe AB, BC. I loro particolari centri di gravità E, F li suppongo situati alla loro metà, onde EF sia parallela ad AC, e divida in due parti eguali BG, GH la retta BH normale ad AC.

Essendo note le lunghezze $AB = h$, $BC = h'$ delle due verghe, ed altresì la diagonale $AC = \sqrt{(f^2+g^2)}$, facilmente si trova il valore di $AH = \frac{h^2-h'^2+f^2+g^2}{2\sqrt{(f^2+g^2)}}$, di $CH = \frac{-h^2+h'^2+f^2+g^2}{2\sqrt{(f^2+g^2)}}$, e conseguentemente ancora quello di $BH = \sqrt{\left(h^2-\frac{(h^2-h'^2+f^2+g^2)^2}{4\cdot(f^2+g^2)}\right)} = 2b$, e poiché GH è la metà di BH, ne proviene $GH = \frac{\sqrt{(-(h^2-h'^2+f^2+g^2)^2+4h^2\cdot(f^2+g^2))}}{4\cdot\sqrt{(f^2+g^2)}} = b$. Dalla riflessione essere $EF = \frac{AC}{2} =$

$\frac{\sqrt{(f^2+g^2)}}{2}$, scopriremo il centro R di gravità dei due pesi $p' = np$, p col mezzo della seguente analogia

$n+1 : 1 :: FE = \frac{\sqrt{(f^2+g^2)}}{2} : FR = \frac{\sqrt{(f^2+g^2)}}{2\cdot(n+1)}$

Tirate RP, FT parallele a AH, ne risulta
$CP = CT + TP = \frac{CH}{2} + FR = \frac{-h^2 + 'h^2 + f^2 + g^2}{4\sqrt{(f^2+g^2)}}$
$+ \frac{\sqrt{(f^2+g^2)}}{2\cdot(n+1)} = \frac{-h^2 + 'h^2}{4\sqrt{(f^2+g^2)}} + \frac{(n+3)\sqrt{(f^2+g^2)}}{4\cdot(n+1)}$, ed indi
$CR = \sqrt{((CP)^2 + (RP)^2)} = \sqrt{\Big(\frac{h^4 - 2h^2\,'h^2 + 'h^4}{16\cdot(f^2+g^2)} + \frac{(-h^2+'h^2)\cdot(n+3)}{8\cdot(n+1)}}$
$\overline{+ \frac{(n^2+6n+9)\cdot(f^2+g^2)}{16\cdot(n^2+2n+1)} + b^2\Big)}$. Sostituisco in vece di b^2 il suo valore, ed aspurgata la formola trovo $CR = \sqrt{\Big(\frac{h^2}{4} + \frac{(n+2)\cdot(-h^2+'h^2)}{4\cdot(n+1)} + \frac{(n+2)\cdot(f^2+g^2)}{4\cdot(n+1)^2}\Big)}$
$= c$. Se il punto A dal raggio $CA = \sqrt{(f^2+g^2)}$ descrive l'arco $AO = \frac{gx}{\sqrt{(f^2+g^2)}}$, dal punto R dal raggio $CR = c$ verrà delineato l'arco simile $RM = \frac{cgx}{f^2+g^2}$. Condotta RQ verticale, ed ML orizzontale, la similitudine dei triangoli RCQ, MRL mi somministra l'analogia $CR : CQ :: RM : RL$, che dà $RL = \frac{CQ\cdot RM}{CR}$: ma $\frac{RM}{CR} = \frac{AO}{CA}$; dunque $AL = \frac{CQ\cdot AO}{CA}$. Si avverta essere $CS = CP - PS$. Per avere il valore di PS, si ricorra all'analogia suggerita dai triangoli simili CDA, RPS, $CD : DA :: RP = GH : PS$,

$g : f :: b : \frac{fb}{g}$,

che determina $PS = \frac{fb}{g}$. Il perchè avremo
$CS = CP - PS = \frac{-h^2 + 'h^2}{4\sqrt{(f^2+g^2)}} + \frac{(n+3)\sqrt{(f^2+g^2)}}{4\cdot(n+1)} - \frac{fb}{g}$,
e stando $CA = \sqrt{(f^2+g^2)} : CD = g :: CS =$
$\frac{-h^2 + 'h^2}{4\sqrt{(f^2+g^2)}} + \frac{(n+3)\sqrt{(f^2+g^2)}}{4\cdot(n+1)} - \frac{fb}{g} : \frac{g\cdot(-h^2+'h^2)}{4\cdot(f^2+g^2)} + \frac{(n+3)\cdot g}{4(n+1)} - \frac{fb}{\sqrt{(f^2+g^2)}}$
$= CQ$, si renda noto il valore di CQ. Avremo dunque

dunque $RL = \frac{CQ \cdot AO}{CA} =$

$\left(\frac{g \cdot (-h^2 + {}'h^2)}{4(f^2+g^2)} + \frac{(n+3) \cdot g}{4(n+1)} \frac{- fb}{\sqrt{(f^2+g^2)}}\right) \cdot \frac{gx}{f^2+g^2}$; e quindi

scopriremo $z' \cdot AN = (n+1)p \cdot RL = \frac{z' \cdot fgx}{f^2+g^2} =$

$(n+1) \cdot p \cdot \left(\frac{g \cdot (-h^2 + {}'h^2)}{4(f^2+g^2)} + \frac{(n+3) \cdot g}{4(n+1)} \frac{- fb}{\sqrt{(f^2+g^2)}}\right) \cdot \frac{gx}{f^2+g^2}$; e

dividendo per $\frac{fgx}{f^2+g^2}$, e ponendo in cambio di b il suo valore,

$$z' = (n+1)p \cdot \left(\frac{g \cdot (-h^2 + {}'h^2)}{4(f^2+g^2)} + \frac{(n+3) \cdot g}{4(n+1) \cdot f} - \frac{\sqrt{(4h^2 - (h^2 - {}'h^2 + f^2 + g^2)^2 + 4h^2 \cdot (f^2+g^2))}}{4 \cdot (f^2+g^2)}\right)$$

il che ecc.

Corollario I.

Supposto $p' = np = p$, ossia $n = 1$, ed inoltre ~~ed inoltre~~ $h = {}'h$, ci si presenterà come nello Scolio II. della Prop. VIII.

$$z' = p \cdot \left(\frac{g}{f} - \frac{\sqrt{(4h^2 - f^2 - g^2)}}{2\sqrt{(f^2+g^2)}}\right) = p \cdot \left(\frac{2g\sqrt{(f^2+g^2)} - f\sqrt{(4h^2 - f^2 - g^2)}}{2f\sqrt{(f^2+g^2)}}\right)$$

Corollario II.

Se facciasi $g = 0$, ne risulterà $z' = 0$. Imperciocchè in questa ipotesi i due termini moltiplicati per g sono eguali a nulla, ed essendo $h + {}'h = f$, abbiamo $h^2 - {}'h^2 + f^2 = (h - {}'h) \cdot (h + {}'h) + (h + {}'h) \cdot (h + {}'h) = 2h \cdot (h + {}'h) = 2h \cdot f$; e perciò $-\sqrt{(4h^2 f^2 - 4h^2 f^2)} = 0$, e conseguentemente $z' = 0$

Corollario III.

La supposizione di $f = 0$ mi dà $z' = \infty$. E varia il vero, i termini primo, e secondo, che sono divisi per f ascendono all'infinito; e poichè nella presente ipotesi $h + {}'h = g$, il terzo termine si prova uguale a nulla con un calcolo simile a quello usato nel Corollario II. Nè quantunque il primo termine fosse negativo, la somma dei

termini

364

termini primo e secondo può mai annullarsi. Acciocchè si annullasse, sarebbe necessario che fosse $\frac{h^2 - h'^2}{g^2} = \frac{(h+h').(h-h')}{g^2} = \frac{n+3}{n+1}$. Ora $h+h' = g$, ed $h-h' < g$; dunque $\frac{h^2-h'^2}{g^2} < \frac{g^2}{g^2} = 1$; e perciò $\frac{h^2-h'^2}{g^2}$ molto più minor di $\frac{n+3}{n+1}$. Per la qual cosa è sempre $-\frac{h^2+h'^2}{g^2} + \frac{n+3}{n+1}$ quantità finita positiva, e conseguentemente infinita la forza $Y' = (n+1).p.\frac{e}{4f}.\left(-\frac{h^2+h'^2}{g^2} + \frac{n+3}{n+1}\right)$.

Proposizione X.

Determinare la posizione di quattro verghe inflessibili uguali (fig. 3.) AB, BC, AB', $B'C'$, perchè siano in equilibrio tra di se, e si reggano scambievolmente sopra gli appoggi immobili C, C' supponendo che l'altezza AD rappresenti una nuova verga interposta col capo superiore fra le due laterali BA, $B'A$, e da essere sostenuta in A.

Ritengo la preparazione, e le denominazioni della Prop. VII., e chiamo $2q$ il peso della verga AD. Nella detta Prop. ho dimostrata la reazione del peso p della verga $AC = p.\frac{(g-u).y}{2.(f-2)}$, e l'azione del peso p della verga $AA = p.\left(\frac{x}{2} - \frac{gy+uy}{2.(f-2)}\right)$. La metà dell'azione del peso $2q$ della verga AD si eguaglia a qx. L'altra metà va computata nell'equilibrio delle verghe AA', $A'C'$.

Se le verghe hanno da stare in equilibrio,

li

l'unica reazione $\frac{p\cdot(g-u)\cdot y}{2\cdot(f-2)}$ darle l'eguaglian= dalle azioni si alla somma $p\cdot\left(\frac{x}{2}+\frac{gy+uy}{2\cdot(f-2)}\right)+qx$; onde si abbia l'equazione $\frac{p\cdot(g-u)\cdot y}{2\cdot(f-2)} = p\left(\frac{x}{2}-\frac{gy+uy}{2\cdot(f-2)}\right)$ $+qx$ (1.) Dalla mentovata Prop. prendo la formola $(f-2)\cdot x = \frac{fuy-gzy}{2}$, da cui ricavo $x=\frac{fuy-gzy}{(f-2)\cdot 2}$. Sostituito questo valore in cambio di x nella formola (1.), e fatte le debite riduzioni, mi si presenta $(3p+2q)\cdot gz-2puz=(p+2q)\cdot fu$ (2.). La citata Prop. mi suggerisce l'equazione $\frac{g^2-2gu+f^2}{2f}=z$ (3.) Surrogato un tal valore nella formola (2.), trovo $(3pg+2qg-2pu)\cdot\left(\frac{g^2-2gu+f^2}{2f}\right)=(p+2q)\cdot fu$, equazione, che alla seguente riducasi

$$u^2-u\cdot\frac{(pf^2+2pg^2+qf^2+qg^2)}{pg}=\frac{-3pf^2-3pg^2-2qf^2-2qg^2}{4p},$$

e compiendo il quadrato $\left(\frac{pf^2+2pg^2+qf^2+qg^2}{2pg}-u\right)^2$

$$=\frac{p^2f^4+p^2f^2g^2+p^2g^4+2pqf^4+4pqf^2g^2+2pqg^4+q^2f^4+2q^2f^2g^2+q^2g^4}{4p^2g^2},$$

e cavata la radice

$$u=\frac{pf^2+2pg^2+qf^2+qg^2}{2pg}-\frac{\sqrt{(p^2f^4+p^2f^2g^2+p^2g^4+2pqf^4+4pqf^2g^2+2pqg^4+q^2f^4+2q^2f^2g^2+q^2g^4)}}{2pg}$$

Dalla formola (3.) ne deduco $u=\frac{f^2+g^2-2fz}{2g}$.

Sostituito questo valore, ne risulta

$$z=\frac{-pg^2-qf^2-qg^2+\sqrt{(p^2f^4+p^2f^2g^2+p^2g^4+2pqf^4+4pqf^2g^2+2pqg^4+q^2f^4+2q^2f^2g^2+q^2g^4)}}{2pf}$$

Il perché le quattro verghe riposeranno in equilibrio, qualora ad u, z si attribuiscano i valori ritrovati; il che &c.

Corollario I.

Se $q=0$, torneremo a trovare come nella Prop.

774

746

Prop. VII.

$$u = \frac{f^2 + 2g^2 - \sqrt{(f^4 + f^2g^2 + g^4)}}{2g}$$

$$z = \frac{-g^2 + \sqrt{(f^4 + f^2g^2 + g^4)}}{2f}$$

Corollario II.

Suppongasi $CD = g$ infinitesima, e cancellati nella radice, che ha luogo nei due valori di u, z, i termini, in cui c'entra g^4, e fatta l'estrazione dalla radice, si avrà $\sqrt{((p^2+2pq+q^2)f^4 + (p^2+4pq+2q^2).f^2g^2)} = (p+q).f^2 + \frac{(p^2+4pq+2q^2).g^2}{2p+2q}$. Sostituito questo valore, ed espurgate le formole scopriremo

$$u = \frac{(3p+2q).g}{(4p+4q)}, \text{ e quando } g = 0,\ u = 0,$$

$$z = \frac{f}{2} - \frac{pg^2}{(4p+4q)f}.$$

Corollario III.

Posto che $AD = f$ sia minima, trascurati nella mentovata radice i termini nei quali ha luogo f^4, e disponendola nel seguente modo, ne proverrà $\sqrt{((p^2+2pq+q^2).g^4 + (p^2+4pq+2q^2)f^2g^2)} = (p+q).g^2 + \frac{(p^2+4pq+2q^2)}{2p+2q}.f^2$. Surrogato un tal valore, e ridotte le formole, trovo

$$u = \frac{g}{2} + \frac{pf^2}{(4p+4q).g} = \frac{g}{2}$$

$$z = \frac{(p+2q)}{4p+4q}.f, \text{ e quando } f = 0,\ z = 0.$$

Scolio.

Perviene il ch. Sig.r Lorgna alla formola

$$u = A \pm \sqrt{(A^2 - B^2)}$$

$$z = \frac{1}{2f}(f^2 g^2 - 2Ag \mp 2g\sqrt{(A^2 - B^2)})\text{, nelle quali}$$

$$A = \frac{(\lambda+2)g^2 + (\lambda+1)f^2}{4g},\quad B^2 = \frac{(\lambda-3)g^2 + (\lambda+3)f^2}{4},$$

λ

$\lambda = \frac{2h\varphi z}{p(fu-gz)}$, $\varphi = \frac{p(g-u)}{2h} - \left(\frac{u(f-z)}{h^2} - \frac{z(g-u)}{h^2}\right) \cdot \left(\frac{pz}{h} + \frac{pu^2}{2h^2}\right) + \left(\frac{z(f-z)}{h^2} + \frac{u(g-u)}{h^2}\right) \cdot \frac{pu}{2h}$. Per far toccare con mano, che le formole del nostro Autore non si accordano colla verità, ovvero che il peso $2q$ della verga AD agli ordinata per λp. Supponendosi noti i pesi p, $2q$, è parimente noto il coefficiente λ. Ora determinando il Sig. Lorgna $\lambda p = \frac{2h\varphi z}{p(fu-g^2)}$, ed essendo φ dato per p, f, g, h, u, z, ne segue, che λp dee dipendere dalle sovrascritte quantità, dimodochè variando p, f, g essi dovrebbe variare anche λp; ovvero supponendo λp costante, tale sarebbe ed essere la grandezza $\frac{2h\varphi z}{(fu-g^2)}$. La prima proposizione non può ammettersi; perchè io posso assegnare alla verga AD il peso $2q = \lambda p$ indipendentemente dai valori di p, f, g.
In riguardo alla seconda proposizione, vediamo cosa succede supponendo λp costante ed uguale al peso dato $2q$. Stando AD $= f$ dentro i termini del finito, siano minima CD $= g$, BV $= u$; e poichè $u < g$, facciasi $nu = g$, ed il coefficiente n dovrà superar l'unità. In detta ipotesi abbiamo adequatamente $h = z = \frac{1}{2}f$. Effettuate le sostituzioni dei detti valori, trovo $\varphi = \frac{(n-1)pu}{f} - \left(\frac{2u}{f} - \frac{2u(n-1)}{f}\right) \cdot \left(p + \frac{2pu^2}{f^2}\right) + \left(1 + \frac{(n-1)4u^2}{f^2}\right) \cdot \frac{pu}{f} = \frac{(3n-4)pu}{f}$, ridotta che

sia

sia la formula, e cancellata la quantità
minima del secondo grado. Avremo per-
tanto $\lambda p = \frac{2hqz}{fu-g^2} = \frac{f\varphi z}{(2-n)u} = \frac{(3n-4)p}{2-n}$.
Sia $\lambda p = 2q$ peso noto della verga AD,
e dalle equazione $2q = \frac{(3n-4)p}{2-n}$ ne
dedurremo il valore di $n = \frac{4p+4q}{3p+2q}$, che
è quello stesso, che gli ho assegnato nella
mia soluzione, onde ne risulta
$\left(\frac{4p+4q}{3p+2q}\right)\cdot u = g$, e per conseguenza
$u = \left(\frac{3p+2q}{4p+4q}\right) g$, come nella soluzione
predetta. Nello estremo limite adunque
di f finita, e di g infinitesima le due
soluzioni convengono.

~~Vediamo cosa succeda nell'opposto limite~~

Passiamo all'opposto limite, che considera
g, ed u finite, ed f, e z infinitesime.
Essendo $f > z$, faccio $kz = f$, ed il
coefficiente k sarà maggiore dell'unità.
In tal circostanza abbiamo adequata-
mente $k = u = \frac{g}{2}$. Surrogati questi
valori sopra $\varphi = \frac{p}{2} + \left(\frac{(k-1)2z}{g} - \frac{2z}{g}\right)\cdot\left(\frac{2pz}{g}+\frac{p}{2}\right)$
$+ \left(\frac{(k-1)4z^2}{g^2}+1\right)\frac{p}{2} = p$, e quindi $\lambda p = \frac{2hqz}{fu-g^2}$
$= \frac{2p}{k-2}$. Sia come sopra $\lambda p = 2q$, e l'
equazione $2q = \frac{2p}{k-2}$ determinerà il
valore di $k = \frac{p+2q}{q}$ molto diverso
da quello, che gli compete nella mia
soluzione, la quale determina $k = \frac{4p+4q}{p+2q}$. Per la qual cosa egli è chiaro
che le formole del Sig.r Lorgna non
convengono

convengono colle mie, che sendo dedotte dal metodo infallibile delle azioni, sono conformi al vero.

Osservazioni sopra l'Esperienza III, che si legge alle pag. 35, 36 dell'Opera di Meccanica Pratica del Signor Paolo Delanges etc.

Osservazioni sopra l'Esperienza III. che si legge alla pag.na 35, 36 dell'Opera del sig. Sig. Paolo Delanges intitolata Meccanica Pratica &c.

Intorno a girelle immobili, i cui diametri erano di pollici 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, avvolse una corda di pollici uno di diametro, alle estremità della quale erano attaccati due pesi ciascuno di libbre 30. Cercò egli adunque qual peso si dovesse da un canto aggiungere per ottenere l'equilibrio colla resistenza sofferta dalla corda; dimodochè accresciuto per un minimo il detto peso, la corda scorra attorno della girella, ed il risultato della diligente sperienza viene espresso dalla seguente Tavola.

Tavola I.

Diametri delle immobili girelle, alle quali fu avvolta la corda di pollici uno di diametro		Pesi di aggiunta necessarj per l'equilibrio meccanico delli accennata corda tesa dal peso di 60 libbre attaccato metà per parte alle sue estremità	
Piedi	Pollici	Libbre	Once
0	7	36	6
0	6	43	0
0	5	50	6
0	4	56	6
0	3	69	0
0	2	86	0
0	1	142	6

Considerando attentamente l'Autore la relazione fra le due colonne di numeri esposti nella tavola, ne raccoglie, che la ragion inversa sudduplicata de' diametri delle girelle, in preferenza ad ogni altra, è quella secondo la quale tende a procedere la detta resistenza.

In

In cambio del primo numero 38 ½, ch'egli assume per vero, io suppongo tale il numero medio 56 ½, e ne proviene quello, che nella sottoposta tavola è registrato

Diametri delle girelle	Pesi in ragione inversa suddu= plicata dei diametri delle girelle.		Differenze dai pesi effettiva= mente aggiunti.	
Pollici	Libbre	Once	Libbre	Once
7	41	8	+ 3	2
6	47	9	+ 4	9
5	52	4	+ 1	10
4	56	6	0	6
3	67	7	− 1	5
2	82	9	− 3	3
1	117	0	− 25	6

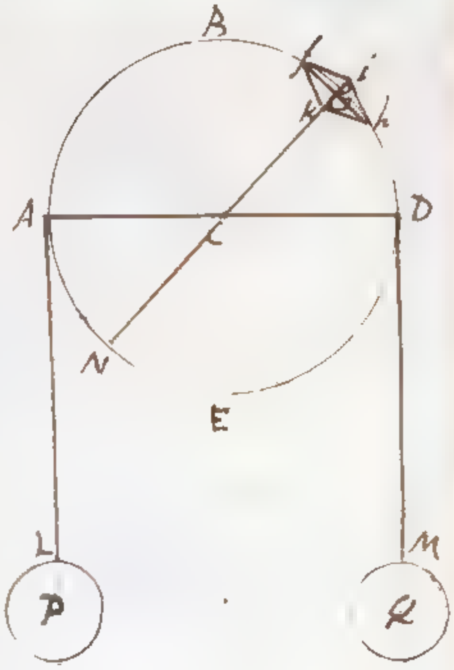
Somma delle differenze non avuto riguardo ai segni del più, e del meno 39 : 11

Se seguendo il Sig. Delanges avessi supposto esatto il peso aggiunto 38 ½ relativo alla girella, il cui diametro di pollici 7, avrei trovate maggiori le differenze, ed il loro aggregato = ,a libbre 60.

Confessa il nostro celebre Autore, che non è sì facile il render ragione della legge dei pesi aggiunti, che s'avvicina alla ragione inversa suddupplicata dei diametri delle girelle. Si può frattanto notare, che i pesi aggiunti si eguagliano alla somma di due resistenze nascenti l'una dallo sfregamento della corda colle girelle, e l'altra dalla renitenza, che prova la corda nel ripiegarsi attorno delle girelle. Supposto che ad ambe l'estremità della corda

sia

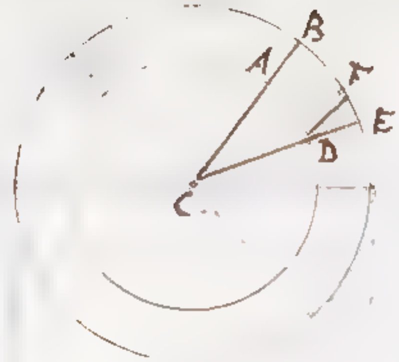
sia attaccato il peso di libbre 30, cerco prima la pressione, che soffrono le girelle, ed indi la legge dello sfregamento relativo alla detta pressione.



Intorno alla girella stabile AADEA sia avvolta la corda LAADM caricata dai pesi P, e Q ciascuno di libbre 30: Segno il minimo arco $fgh = 2ds$, e condotte le tangenti fi, hi, si delinea la retta Ci che taglierà l'arco fgh in due parti eguali fg, e gh ognuna $= ds$: Descrivo hk, fk parallele ad fi, hi. Sia l'intercetta fra le tangenti ed il circolo, cioè $ig = ddx$, onde si determini per conseguenza $ik = 4ddx$. La porzione minima fh della corda è tirata per le direzioni if, ih da due forze p ciascuna eguale a libbre 30 e queste due forze compongono per la direzione ik la pressione sostenuta dalla parte minima fh della girella. Inoltre le forze per if, ik stanno come le dette linee; dimodochè ne risulta la analogia $fi = ds : ik = 4ddx :: p : \frac{4pddx}{ds}$, l'ultimo termine della quale esprime la pressione sofferta dall'elemento fh della girella.

La Geometria ci insegna essere $Nig = (fi)^2$, e quindi chiamato r il raggio della girella $2rddx = ds^2$, ossia $ddx = \frac{ds^2}{2r}$. Fatto uso di questo valore, scopriremo la pressione dell'elemento fh della girella $= \frac{2pds}{r}$. Ci si manifesterà la pressione del semicircolo ABD, il cui perimetro per la regola di Archimede $= \frac{22r}{7}$, col mezzo della seguente analogia $2ds : \frac{2pds}{r} :: \frac{22r}{7} : \frac{22p}{7}$, il cui quarto termine si eguaglia alla mentovata pressione. Si inferisca, che il vario valore del raggio r della girella nulla influisca

nella



nella pressione, e che sendo costanti i pesi P, P attaccati alle due estremità della corda, e nominati espressi per p, è altresì costante la pressione, qualunque sia il loro diametro. Quale sia il valore del fregamento corrispondente alla pressione $2p$, lo determinerò col mezzo della sopra riferita Esperienza III.

Passo presentemente ad indagare le resistenze originate dalla renitenza, che prova la corda nel ripiegarsi attorno delle girelle di vario diametro. In due di queste girelle segno gli elementi AD, ad proporzionali ai raggi AC, ac, e prolungando i raggi CA, CD, ca, cd in B, E, b, e, onde AB, DE, ab, de siano eguali alla grossezza costante della corda, coi raggi CB, cb delineo gli archetti BE, be, ed indi le rette DF, df parallele alle linee CB, cb. È facile a vedersi, che i triangoli DFE, dfe sono eguali, e che tanto si allunga l'elemento di corda AD, quanto l'ad. Si raccoglie dallo Schediasma I. della mia Opera Della Corda, ovvero Fibra elastica, che per allungare proporzionatamente i detti elementi sino in E, g, ci vorrebbero forze uguali f, f: ma pel citato Schediasma gli allungamenti della stessa corda bf stanno come le forze, che li producono; dunque $fg : fe = FE :: f : \varphi = f \cdot \frac{FE}{fg}$, forza atta a cagionare l'allungamento $fe = FE$. E poiché $\frac{FE}{fg} = \frac{AC}{ac}$, ne segue essere $\varphi = f \times \frac{AC}{ac}$, e per conseguenza $f : \varphi :: ac : AC$, cioè a dire le forze producenti le distensioni FE, fe in ragione inversa dei raggi, o dei diametri delle girelle. Si inferisca,

che

che nella detta ragione si riferiscono le resistenze nascenti dal ripiegamento della corda, facendo esse resistenze equilibrio colle forze, che hanno cagionato le distensioni FE, fe.

Stabilite le leggi che delle due resistenze una esser debba costante, supposto che non venga accresciuta dai pesi aggiunti, e l'altra in ragione inversa dei diametri delle girelle; cerco il valore delle mentovate resistenze, servendomi dalla Esperienza III. registrata alla pag. 381. Se il diametro della girella era di pollici 7, si ricavava per l'equilibrio meccanico il peso aggiunto di libbre 38 : 6; e se il diametro era di pollici 1, era necessaria l'aggiunta di libbre 142 : 6. Io suppongo esatti questi accrescimenti di peso relativi alle girelle, i cui diametri si riferiscono nella più rimota ragione di 7 : 1. Sia = z il fregamento costante, e per la seconda legge si dovrà avverare l'analogia $38\frac{1}{2} - z : 142\frac{1}{2} - z :: 1 : 7$, e perciò $142\frac{1}{2} - z = 269\frac{1}{2} - 7z$, ossia $\frac{269\frac{1}{2} - 142\frac{1}{2}}{6} = \frac{127}{6} = 21\frac{1}{6} = 21 : 2 = z$, fregamento sofferto dalle due girelle. Ne segue che le resistenze nascenti dal ripiegare la fune saranno libbre $38\frac{1}{2} - 21\frac{1}{6} = 17\frac{1}{3} = 17 : 4$; $142\frac{1}{2} - 21\frac{1}{6} = 121\frac{1}{3} = 121 : 4$. Nella sottoscritta tavola, supposto sempre il fregamento di libbre 21 : 2, determino le resistenze provenienti dal ripiegare la corda in proporzione reciproca dei diametri delle girelle, e notata la somma delle due resistenze di fregamento e di ripiegamento, osservo quanto questa

differisca

Differisca dalla Esperienza III.

Tavola III.

Diametri della girella.	Fregamenti	Resistenze della corda nel ripiegarsi	Somma delle due resistenze:	Differenze dai pesi effettivamente aggiunti:
Pollici.	Libbre Once.	Libbre Once.	Libbre Once.	Libbre Once
7.	21 : 2	17 : 4	38 : 6	0 : 0
6.	21 : 2	20 : 2 $\frac{2}{5}$	41 : 4 $\frac{2}{5}$	− 1 : 7 $\frac{1}{5}$
5.	21 : 2	24 : 3 $\frac{1}{5}$	45 : 5 $\frac{1}{5}$	− 5 : [illegible] $\frac{4}{5}$
4.	21 : 2	30 : 4	51 : 6	− 7 : [illegible]
3.	21 : 2	40 : 5 $\frac{1}{5}$	61 : 7 $\frac{1}{5}$	− 8 : 4 $\frac{2}{5}$
2.	21 : 2	60 : 8	81 : 10	− 4 : 2
1	21 : 2	121 : 4	142 : 6	0 : 0

Somma delle differenze − 25 : 2 $\frac{4}{5}$

Ci accosteremo maggiormente alla Esperienza III. supponendo giusti i pesi aggiunti 50 : 6; 142 : 6 relativi ai Diametri della girella di pollici 5, di pollici 1. Col mezzo dell'analogia 50 $\frac{1}{2}$ − z : 142 $\frac{1}{2}$ − z :: 1 : 5 si determinerà lo sfregamento costante z = 27 $\frac{1}{2}$, e detraendolo dai pesi aggiunti 50 $\frac{1}{2}$, 142 $\frac{1}{2}$, ne risulteranno le resistenze 23, 115 provenienti dal piegarsi la corda intorno la girella, i cui diametri poll. 5, poll. 1. Le altre resistenze analoghe si avranno la ragione inversa dei Diametri della rispettiva girella.

Tavola IV.

Diametri della girella.	Fregamenti	Resistenze della corda nel ripiegarsi	Somma delle due resistenze	Differenze dai pesi aggiunti
Pollici	Libbre Once	Libbre Once	Libbre Once	Libbre Once
7.	27 : 6	16 : 5 $\frac{1}{5}$	43 : 1 $\frac{1}{5}$	+ 5 : 5 $\frac{1}{5}$
6.	27 : 6	19 : 2	45 : 8	+ 2 : 8
5.	27 : 6	23 : −	50 : 6	0 : 0
4.	27 : 6	28 : 9	56 : 3	− 2 : 3
3.	27 : 6	38 : 4	65 : 10	− 3 : 2
2.	27 : 6	57 : 6	85 : −	− 1 : −
1.	27 : 6	115 : −	142 : 6	0 : 0

Somma delle differenze non avuto riguardo ai segni del più, e del meno 14 : 6 $\frac{1}{5}$

Egli è di uopo pur altre riflettere, che quantunque i pesi aggiunti si adoperino a vincere lo sfregamento cagionato dal peso di libbre 62 pendente dalla corda mezzo per parte, e la ripugnanza della corda ~~intorno~~ a piegarsi intorno alla girella; nulladimeno anch'esso dee accrescere lo sfregamento. In fatti se paragonassimo insieme le girelle dai diametri 7, 4; 4, 1, e cercassimo il fregamento mediante le analogia

~~[illegible]~~

~~[illegible] 142½ − Z~~ :: 1 : 7, troveremo

~~[illegible]~~,

~~e ci accorgeremmo, che allo aumentarsi~~

~~dai pesi aggiunti, crescono i fregamenti~~

$346\frac{1}{2} - z : 546\frac{1}{2} - z :: 4 : 7$

$546\frac{1}{2} - Z : 142\frac{1}{2} - Z :: 1 : 4$, troveremo

z = libbre $11\frac{5}{6}$ = libbre 11 once 10

Z = libbre $30\frac{1}{2}$ = libbre 30 once 6

e ci accorgeremo, che allo aumentarsi dai pesi aggiunti, crescono i fregamenti.

Suppongasi che calando aritmeticamente i diametri delle girelle, i fregamenti crescano in ragione aritmetica, onde alle girelle dai diametri 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1 si riferiscano i fregamenti z; $z+x$, $z+2x$, $z+3x$, $z+4x$, $z+5x$, $z+6x$. Suppongansi altresì esatti i pesi aggiunti $346\frac{1}{2}$, $546\frac{1}{2}$, $142\frac{1}{2}$ relativi alle girelle dai diametri 7, 4, 1; alle quali devono competere i fregamenti z, $z+3x$, $z+6x$. Ora dovendo stare i pesi aggiunti meno gli sfregamenti

in

in ragiona inversa dai diametri dalle girel=
le, ne nascono le analogie

$36\frac{1}{2} - 2 : 54\frac{1}{2} - 2 - 3x :: 4 : 7$,

$54\frac{1}{2} - 2 - 3x : 142\frac{1}{2} - 2 - 6x :: 1 : 4$,

dalle quali, fatte le debite operazioni, si de=
ducono le due equazioni $\frac{3z - 35\frac{1}{2}}{12} = x$ (1.)
$\frac{30\frac{1}{2} - z}{2} = x$ (2.), e da queste la terza
$24\frac{5}{16} = z$ (3.). Si sostituisca un tal valore
nella prima, o nella seconda equazione,
e si scoprirà ... $3 + \frac{1}{9} = x$. Ne proverrà
pertanto la seguente ~~Tavola~~

Tavola V.

Diametri delle girelle	Tiramenti		Resis.za della corda nel ripiegarsi		Somma delle due resistenze		Diff.e dei pesi aggiunti	
Pollici	Libbre	Once	Libbre	Once	Libbre	Once	Libbre	Once
7.	24 :	$3\frac{1}{3}$	14 :	$2\frac{2}{3}$	38 :	6	0 :	0
6.	27 :	$4\frac{2}{3}$	16 :	$7\frac{1}{9}$	43 :	$11\frac{7}{9}$	+ 0 :	$11\frac{7}{9}$
5.	30 :	6	19 :	$10\frac{14}{15}$	50 :	$4\frac{14}{15}$	− 0 :	$1\frac{1}{15}$
4.	33 :	$7\frac{1}{3}$	24 :	$10\frac{2}{3}$	58 :	6	0 :	
3.	36 :	$8\frac{2}{3}$	33 :	$2\frac{2}{9}$	69 :	$10\frac{8}{9}$	+ 0 :	$10\frac{8}{9}$
2.	39 :	10	49 :	$9\frac{1}{3}$	89 :	$7\frac{1}{3}$	+ 3 :	$7\frac{1}{3}$
1.	42 :	$11\frac{1}{3}$	99 :	$6\frac{2}{3}$	142 :	6	0 :	0

Somma delle differenze non avuto riguardo ai segni del più, e del meno ... 5 : $7\frac{1}{15}$

In questa Tavola la massima differenza dei pesi aggiunti è soltanto di libbre 3, once $7\frac{1}{3}$, e la somma delle differenze non ascende se non che a libbre 5, once $7\frac{1}{15}$; laddove nella Tavola seconda dedotta dalla legge che i pesi aggiunti serbino la ragione inversa duplicata dei diametri delle girelle la massima differenza dei pesi aggiunti è di libbre 25, once 6, e la somma delle differenze di libbre 39, once 11. Anche le Tavole terza, e quarta, che suppongono i tiramenti costanti, danno la massima differenza, e la somma delle differenze maggiori di quelle, che sono determinate dalla Tavola quinta. V. perché le leggi da me stabilite, che la resistenza della corda nel ri=piegarsi accettino la ragione reciproca dei diametri delle girelle, e che scemando aritmeticamente i predetti diametri, i tiramenti crescano in ragione aritmetica, si debbono accettare siccome vere. La prima è dimostrata, e la seconda è bastantemente confermata dall'esperienza.

dalla

Jal

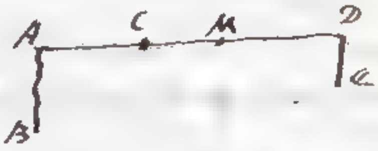
Avvertenze
sopra l'Opera del Signor A.P.
Mascheroni.–

Tal

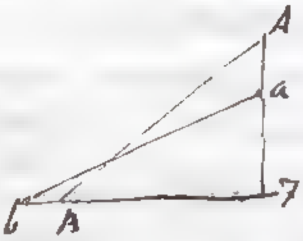
Avvertenze sopra l'Opera del Sig. Ab. Mascheroni

Nel Teorema I. confonde la forza colla sua azione, chiamando forza l'azione della forza. Un peso, è una forza; e se questo peso discende per uno spazio verticale ds, il prodotto pds è l'azione del peso.

Anche nel Teorema II seguita a chiamare forze le loro azioni, e dice che quando le forze contrarie sono eguali, il loro comune centro di gravità non discende. Se ci siano due corpi gravi, le azioni eguali e contrarie di questi pesi mutuamente s'impediscono, e non seguendo moto, egli è infallibile che il comune loro centro di gravità non discenda. Le masse per altro propriamente parlando non si debbono considerare negli equilibrj. I due elastri AA, Da siano equilibrati intorno al punto C, e sussisterà l'equilibrio, quantunque al vette AD si attacchi la massa non gravia M.



Problema I. Determina rettamente la ragione delle azioni dei due pesi A, A collocati nei punti estremi della verga AA, chiamando forze al solito le dette azioni. Osserva nel Corollario I. che scorrendosi dai pesi A, B gli spazj Aa verticale, Ab orizzontale, è nulla la forza, o meglio l'azione del peso A. In tal circostanza si cangia lo stato dei corpi A, B a cagione soltanto dell'azione del peso A. Sia nel principio del moto du la velocità del corpo A, e dv quella del corpo B, e si avrà $A \cdot Aa = A \cdot \frac{du^2}{2} + B \cdot \frac{dv^2}{2}$: ma $du : dv :: Aa : Ab$; dunque $dv = \frac{Ab}{Aa} \cdot du$, e quindi $A \cdot Aa =$



$$A \cdot \frac{du^2}{2} + B \cdot \frac{\overline{Ab}^2}{\overline{Aa}^2} \cdot \frac{du^2}{2} = \left(\frac{A \cdot \overline{Aa}^2 + B \cdot \overline{Ab}^2}{\overline{Aa}^2}\right) \cdot \frac{du^2}{2}.$$ Facciasi

$$A \cdot \overline{Aa}^2 + B \cdot \overline{Ab}^2 : B \cdot \overline{Ab}^2 :: A \cdot Aa : \frac{A \cdot Aa \cdot B \cdot \overline{Ab}^2}{A \cdot \overline{Aa}^2 + B \cdot \overline{Ab}^2},$$

e questo sarà il valore di quella parte di azione del peso A, che s'impiega a cangiare lo stato

del

41r

La forza orizzontale applicata in B, che fa equilibrio colla forza A, che tenta di agire per lo spazietto Aa, s'agguaglia ad $\frac{A\cdot Aa}{Ab}$: ma $\frac{Aa}{Ab}=\frac{B\gamma}{A\gamma}$; dunque essa forza $= A\cdot\frac{A\gamma}{A\gamma}$. Agguagliandosi $A\cdot\frac{A\gamma}{A\gamma}\cdot Ab$ alla totale azione A·Aa, ed $\frac{(A\cdot B\gamma\cdot B\cdot A\gamma)\cdot Ab}{A\cdot\overline{B\gamma}^2+B\cdot\overline{A\gamma}^2}$ a quella parte della detta azione, che s'impiega a cangiar lo stato del corpo B; ne segue, che $A\cdot\frac{B\gamma}{A\gamma}\cdot Ab-\frac{A\cdot A\gamma\cdot B\cdot A\gamma\cdot Ab}{A\cdot\overline{B\gamma}^2+B\cdot\overline{A\gamma}^2}$ $=\frac{A^2\cdot\overline{A\gamma}^3\cdot Ab}{A\cdot A\gamma\cdot\overline{A\gamma}^2+B\cdot\overline{A\gamma}^3}$ sarà quella porzione dell'azione $A\cdot Aa = A\cdot\frac{B\gamma}{A\gamma}\cdot Ab$ che altera lo stato del corpo A. Si osservi che posto B = 0, ne risulta la detta azione $= A\cdot\frac{B\gamma}{A\gamma}\cdot Ab$ = A·Aa, uguale all'azione totale, che unicamente si adopra nella mutazione dello stato del corpo A.

del corpo B. ~~Il perchè si può supporre in B una forza orizzontale $\frac{A\cdot Aa\cdot A\cdot \overline{Ab}^2}{A\cdot\overline{Aa}^2+A\cdot\overline{Ab}^2}$, che agendo per lo spazietto Ab, produca il cangiamento di stato nel corpo B.~~ Poichè AB = ab, $\overline{AB}^2=\overline{ab}^2$, ed $\overline{AB}^2=\overline{A\gamma}^2+\overline{B\gamma}^2$, $\overline{ab}^2=\overline{A\gamma}^2-2A\gamma\cdot Aa+\overline{Aa}^2+\overline{B\gamma}^2+2B\gamma\cdot Ab+\overline{Ab}^2$, si raccoglie $Aa=\frac{B\gamma}{A\gamma}\cdot Ab$. Sostituito questo valore, scopriremo la predetta parte d'azione $=\frac{A\cdot A\cdot\frac{B\gamma}{A\gamma}\cdot\overline{Ab}^2}{A\cdot\frac{\overline{B\gamma}^2}{\overline{A\gamma}^2}\cdot\overline{Ab}^2+B\cdot\overline{Ab}^2}=$ $\frac{(A\cdot B\gamma\cdot B\cdot A\gamma)\cdot Ab}{A\cdot\overline{B\gamma}^2+B\cdot\overline{A\gamma}^2}$. Il perchè si può supporre in B una forza orizzontale $A\cdot B\gamma\cdot B\cdot A\gamma : A\cdot\overline{B\gamma}^2+B\cdot\overline{A\gamma}^2$, che agendo per lo spazietto Ab produca il cangiamento di stato nel corpo B.

Suppone l'Autore nello Scolio dopo il Problema I., che nel caso di equilibrio il centro di gravità della massa pesante A, B si possa muovere orizzontalmente. Non succedendo in tal ipotesi veruna azione, e supponendosi da principio i corpi quieti, il centro di gravità non può acquistare alcun moto.

Io scioglierei il Problema II. nella seguente maniera. Le azioni dei due pesi G, Q stanno come G·Gy : Q·qx (fig. 5.). Dopo che l'Autore ha determinato $Gy=\frac{AG}{BA}\cdot(Aa+bp)-bp$, $qx=\frac{CQ}{CA}\cdot bp$, continuerei così. Si rifletta essere $\overline{AB}^2=\overline{B\gamma}^2+\overline{A\gamma}^2$, $\overline{ab}^2=\overline{AB}^2=\overline{bf}^2+\overline{af}^2$: ma $bf=B\gamma+Bp$; dunque $\overline{bf}^2=\overline{B\gamma}^2+2B\gamma\cdot Bp$. E poichè $Ce : Be :: bp : Bp=\frac{Be}{Ce}\cdot bp$, avremo $\overline{bf}^2=\overline{B\gamma}^2+2\frac{B\gamma\cdot Be}{Ce}\cdot bp$. Inoltre $af=A\gamma-Aa-bp$, e $\overline{af}^2=\overline{A\gamma}^2-2A\gamma\cdot(Aa+bp)$. Sarà pertanto $\overline{B\gamma}^2+\overline{A\gamma}^2=\overline{B\gamma}^2+2\frac{B\gamma\cdot Be}{Ce}\cdot bp+\overline{A\gamma}^2-2A\gamma\cdot(Aa+bp)$, e per conseguenza $\left(\frac{B\gamma\cdot Be}{Ce}-A\gamma\right)\cdot bp=A\gamma\cdot Aa$, ovvero $\left(\frac{B\gamma\cdot Be-A\gamma\cdot Ce}{A\gamma\cdot Ce}\right)\cdot bp=Aa$. Fatto uso di questo valore, troveremo le due azioni come

$G \cdot \left(\frac{BG}{BA}\left(\left(\frac{A\gamma \cdot AQ - A\gamma \cdot CQ}{A\gamma \cdot CQ}\right) bp + bp\right) - bp\right) = Q \cdot \frac{CQ}{CB} \cdot bp,$

ed espurgando la formula, e dividendo per bp, come

$G\left(\frac{A\gamma \cdot AQ \cdot AG}{A\gamma \cdot CQ \cdot AA} - 1\right) = Q \cdot \frac{CQ}{CB}$, proporzione

che conviene con quella dell'Autore.

In riguardo allo Scolio dopo il Proble=ma 11. noto, che siccome in cambio di Q posso sostituire nel sito B il peso $= Q \cdot \frac{CQ}{CB}$; così in cambio di G m'è lecito il collocare in A il peso $G \cdot \frac{GY}{Aa} = G \cdot \left(\frac{BG}{BA} + \left(\frac{AG}{AA} - 1\right) \cdot \frac{A\gamma \cdot CQ}{B\gamma \cdot BQ - A\gamma \cdot CQ}\right)$

onde ne risultino le due azioni come

$Q \cdot \frac{CQ}{CB} \cdot \frac{bp}{Aa} = Q \cdot \frac{CQ}{CB} \cdot \frac{A\gamma \cdot CQ}{B\gamma \cdot BQ - A\gamma \cdot CQ}$:

$G \cdot \left(\frac{BG}{BA} + \left(\frac{BG}{AA} - 1\right) \cdot \frac{A\gamma \cdot CQ}{A\gamma \cdot AQ - A\gamma \cdot CQ}\right)$, e dividendo

per $\frac{A\gamma \cdot CQ}{A\gamma \cdot AQ - A\gamma \cdot CQ}$ come

$Q \cdot \frac{CQ}{CA} : G \cdot \left(\frac{AG}{BA} \cdot \left(\frac{A\gamma \cdot AQ}{A\gamma \cdot CQ} - 1\right)\right)$, qual mente si è ritrovato nel Problema 11. Colla predetta sostituzione il Problema 11. si riduce al primo.

Facciasi ~~$BQ + CQ = Bp$ $bp = \frac{CQ \cdot Bp}{BQ}$~~

e ~~sarà $Q \cdot \frac{CQ}{CB} \cdot bp = \frac{Q \cdot CQ \cdot CQ \cdot Bp}{CB \cdot BQ}$~~

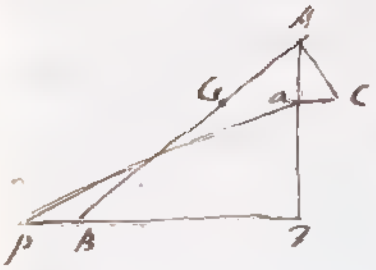
Se sia $CQ = 0$, onde Ab coincida con Ap il peso da collocarsi in A sarà $= G \cdot \frac{BG}{AB}$, e la sua azione impedita $G \cdot \frac{AG}{AA} \cdot Aa$ cagionerà in B la pressione orizzontale $G \cdot \frac{AG}{AA} \cdot \frac{Aa}{Ap}$.

Ora dall'essere $AA = ab$ si raccoglie

$\overline{A\gamma}^2 + \overline{B\gamma}^2 = \overline{A\gamma}^2 - 2A\gamma \cdot Aa + \overline{B\gamma}^2 + 2B\gamma \cdot Bp$

e perciò $\frac{Aa}{Ap} = \frac{B\gamma}{A\gamma}$. Sarà dunque la predetta

pressione



pressione $= G \cdot \frac{BG \cdot AD}{BA \cdot AD}$ come appunto la ha determinata ne' suoi Saggi di Statica il Sig. Cav. Lorgna.

Si ponga in B un' egual forza contraria, che spinga da B verso D, e questa impedirà l'azione del peso $G \cdot \frac{BG}{BA}$ per lo spazietto verticale Aa purchè sia immobile la linea AD. Rimossa questa condizione, si tiri l'orizzontale aC, e fatto centro in B, col raggio BA si descriva l'archetto AC. Per la similitudine dei triangoli BDA, AaC abbiamo l'analogia BD : AD :: Aa : aC, e quindi $\frac{BD}{AD} = \frac{Aa}{aC}$; ma di sopra abbiamo provato $\frac{BD}{AD} = \frac{Aa}{Bp}$; dunque $aC = Bp$.
Si cavi la conseguenza che il punto A della linea inamovibile AD soffre la spinta orizzontale $G \cdot \frac{BG}{BA} \cdot \frac{Aa}{aC} = G \cdot \frac{BG \cdot BD}{BA \cdot AD}$ uguale a quella che sostiene il punto A. Il lodato Sig. Cav. sbaglia ponendola uguale a
$G \cdot \frac{BG \cdot AD \cdot BD}{BA^3}$

Delle Altezze Barometriche

Dissertazione Geometrico-Analitica.

NB. Veggasi la Dissertazione sotto lo stesso titolo stampata nel V. Volume alla pag. 494. delle Memorie di Matematica, e Fisica della Società Italiana

Verona

Per Dionigi Ramanzini

1790

Delle Altezze Barometriche

Dissertazione Geometrica Analitica del Sig. Co. Giordano Riccati.

Nel Saggio Analitico sopra le Altezze Barometriche del chiar. P. D. Gregorio Fontana ho molto ammirare il possesso del calcolo col quale separa le variabili, e conduce ad integrazione le formole differenziale, a cui dai suoi raziocinj è guidato. La supposizione, che tutta la colonna di mercurio sia fornita della gravità relativa alla distanza dal centro della Terra del punto infimo di essa colonna, non si accorda col vero salvochè nella circostanza, che l'altezza della predetta colonna sia minima rispettivamente alla lontananza dal centro. Penso inoltre, che in alcuni incontri il Dottissimo Padre non abbia pienamente capito il misterioso linguaggio dell'Analisi, e non rettamente si sia lasciato condurre a cangiare i segni nella formola dimostrativamente determinata. La Geometria, congiunta coll'Analisi serve d'interprete, e ci fa toccare con mano, che una sola formola soddisfà a tutte le determinazioni: la qual verità mi ingegnerò di porre in chiaro nella presente Dissertazione.

Data l'altezza del mercurio nel barometro al livello del mare, si cerca l'altezza del medesimo per qualunque luogo o sopra, o sotto il livello marittimo, supposta la gravità variabile in ragione inversa di una potenza n della distanza dal centro terrestre.

Chiamo a l'altezza del mercurio nel barometro al livello del mare, p la distanza del luogo dal centro della terra, s l'altezza del mercurio in questo luogo, f la densità dell'aria vicino al mare, q la densità della medesima alla distanza p dal centro terrestre, g la gravità acceleratrice sulla superficie del mare, ed r finalmente il semidiametro della terra. Si eguagli a gA il peso della colonna marittima di mercurio, la cui altezza $= a$, ed essendo a fisicamente trascurabile in riguardo ad r, agevolmente ci accorgeremo, che a, ed A fisicamente si eguagliano, potendosi considerare costante la gravità pel tratto $= a$.

Sarà dunque gA eguale alla pressione di tutta la colonna di aria dalla superficie del mare sino al termine dell'atmosfera, e facendo come $\frac{1}{r^n}$ ad $\frac{1}{(p+s)^n}$, così g al quarto $\frac{gr^n}{(p+s)^n}$, esprimerà questo la gravità acceleratrice alla distanza $p+s$ dal centro terrestre. Moltiplicando per ds si otterrà $\frac{gr^n ds}{(p+s)^n}$, ed integrando, supposta p costante, ne risulterà $= \frac{-gr^n}{(n-1)\cdot(p+s)^{n-1}} + B$ il peso della colonna di mercurio

Di

di lunghezza s posta al di sopra della distanza p dal centro della terra. Si determina la costante B osservando, che il peso della colonna è nullo, quando $s = 0$. Avremo dunque $-\frac{gv^n}{(n-1)\cdot p^{n-1}} + B = 0$, e conseguentemente $B = \frac{gv^n}{(n-1)\cdot p^{n-1}}$. Per la qual cosa il peso cercato $= \frac{gv^n}{(n-1)\cdot p^{n-1}} - \frac{gv^n}{(n-1)\cdot (p+s)^{n-1}}$, a cui si uguaglia la pressione dell'aria superiore alla distanza p dal centro terrestre. Secondochè sarà p maggiore, o minore di v, si avrà $gA \pm \frac{gv^n}{(n-1)\cdot p^{n-1}} - \frac{gv^n}{(n-1)\cdot (p+s)^{n-1}}$ uguale alla pressione della colonna d'aria dell'altezza $p-v$, ovvero $v-p$. Ora se di questa colonna si prenda l'elemento $\pm dp$, e si moltiplica per la densità q, e per la gravità acceleratrice $\frac{gv^n}{p^n}$ alla distanza p dal centro della terra, il prodotto $\pm \frac{gv^n q\, dp}{p^n}$ rappresenta la pressione elementare di detta colonna. Quindi è agevole l'inferire $\int \pm \frac{gv^n q\, dp}{p^n} = \pm gA \pm \frac{gv^n}{(n-1)\cdot p^{n-1}} \pm \frac{gv^n}{(n-1)\cdot (p+s)^{n-1}}$. Pongo $\frac{gv^n}{(n-1)\cdot p^{n-1}} - \frac{gv^n}{(n-1)\cdot (p+s)^{n-1}} = gz$, cioè a dire uguale al peso di una colonna di mercurio di lunghezza $= z$, che sia fornita della gravità acceleratrice g conveniente alla distanza v dal centro terrestre, ed effettuata la sostituzione trovo $\int \pm gv^n q\, dp = \pm gA \mp gz$.

Supposta la densità dell'aria proporzionale ai pesi superiori prementi; e ad un peso sempre uguale e costante gC, si avrà l'analogia $gA + gC : \frac{gv^n}{(n-1)\cdot p^{n-1}} - \frac{gv^n}{(n-1)\cdot (p+s)^{n-1}} + gC :: f : q$, e sia ponendo in vece del secondo termine il suo valore $= gz + gC$, $gA + gC : gz + gC :: f : q$, e perciò $q = \frac{f\cdot(z+C)}{A+C}$. Sostituito questo valore nella scoperta formola, ci si presenta $\int \frac{fv^n dp}{(A+C)\cdot p^n}\cdot(z+C) = A-z$, e presa le differenze, $\frac{fv^n dp}{(A+C)\cdot p^n}\cdot(z+C) = -dz$, ovvero $\frac{fv^n dp}{(A+C)\cdot p^n} = \frac{-dz}{z+C}$, ed integrando $\frac{fv^n}{(n-1)\cdot(A+C)\cdot p^{n-1}} = l(z+C) + B$; ma quando $p = v$, $z = A$; dunque $\frac{fv}{(n-1)\cdot(A+C)} = l(A+C) + B$, o pure $B = \frac{fv}{(n-1)\cdot(A+C)} - l(A+C)$; e quindi $\frac{fv}{(n-1)\cdot(A+C)} - \frac{fv^n}{(n-1)\cdot(A+C)\cdot p^{n-1}} = l\frac{A+C}{z+C}$, e conseguentemente, chiamando e la base della logaritmica, la cui suttangente $= 1$,

$$e^{\frac{fv}{(n-1)\cdot(A+C)} - \frac{fv^n}{(n-1)\cdot(A+C)\cdot p^{n-1}}} = \frac{A+C}{z+C},$$

e finalmente

$$(A+C)\cdot e^{\frac{-fv}{(n-1)\cdot(A+C)} + \frac{fv^n}{(n-1)\cdot(A+C)\cdot p^{n-1}}} - C = z.$$

Ne

Ne risulterà $z = 0$, qualora sia $\frac{fv}{(n-1)\cdot(A+C)} - \frac{fv^n}{(n-1)\cdot(A+C)\cdot p^{n-1}} = l\,\frac{A+C}{C}$, e perciò $p = \left(\frac{fv^n}{fv-(n-1)\cdot(A+C)\cdot l\,\frac{A+C}{C}}\right)^{\frac{1}{n-1}}$. In tal sito, ed a tale distanza dal centro della terra termina l'atmosfera, e l'aria quivi non compressa da peso alcuno è fornita della densità $= \frac{fC}{A+C}$.

Esempio I.

Sia $n = 0$, cioè a dire la gravità costante, e ne nascerà $(A+C)\cdot e^{\frac{f\cdot(v-p)}{A+C}} - C = z = s$.

Si annullerà z qualora sia $C = (A+C)\cdot e^{\frac{f\cdot(v-p)}{A+C}}$, e conseguentemente $\frac{A+C}{C} = e^{\frac{f\cdot-(v-p)}{A+C}}$, o pure $l\,\frac{A+C}{C} = \frac{f\cdot(p-v)}{A+C}$, e finalmente $p = v + \left(\frac{A+C}{f}\right)\cdot l\left(\frac{A+C}{C}\right)$. Questo valor è finito, purchè C sia quantità finita, e l'aria benchè non compressa sia fornita di qualche densità, il che certamente addiviene in Fisica. Che se si supponga $C = 0$, si troverà che a $z = 0$ si riferisca $p = \infty$, ascendendo all'infinito il logaritmo di $\frac{A}{0}$.

Posta $p = 0$, si scoprirà che nel centro della terra il mercurio si sostiene all'altezza $z = (A+C)\cdot e^{\frac{fv}{A+C}} - C$.

Facendo p negativa si avvererà la formola $z = (A+C)\cdot e^{\frac{fv+fp}{A+C}} - C$, e l'altezza del mercurio seguiterà a crescere aumentandosi p negativa, a cagione che si suppone, che la gravità costante anche di là dal centro della terra non cangi direzione.

Che se vogliasi, che passato il centro la gravità divenga negativa, e spinga verso il centro medesimo; bisognerà capovoltare il barometro, e di là dal centro si troveranno le stesse altezze del mercurio, come di quà a pari distanza. In tale ipotesi le distanze p si assumano come positive anche di là dal centro, e si faccia uso della stessa formola come di quà dal centro predetto.

Esempio II.

Passo a considerare l'ipotesi di $n = 2$, o sia della gravità acceleratrice in ragione inversa dei quadrati delle distanze dal centro della terra, la quale mi dà $(A+C)\cdot e^{\frac{-fv}{A+C}+\frac{fv^2}{(A+C)\cdot p}} - C = z$.

Qualora $z = 0$, troveremo $p = \frac{fv^2}{fv-(A+C)\cdot l\,\frac{A+C}{C}}$. Se la grandezza di C sia tale, che ne risulti $fv > (A+C)\cdot l\,\frac{A+C}{C}$, si annullerà z ad una distanza finita dal centro.

Posto che sia $fv = (A+C)\cdot l\,\frac{A+C}{C}$, o pure $\frac{fv}{A+C} = l\,\frac{A+C}{C}$, ci si presenta $p = \frac{fv^2}{0} = \infty$, e z si annienta ad una lontananza infinita dal centro

centro terrestre.

Assegnando a C un valore più piccolo, onde divenga $fr < (A+C).l\left(\frac{A+C}{C}\right)$, o pure $\frac{fr}{A+C} = l\left(\frac{A+C}{C}\right)$, svanisce z quando $p = \frac{fr^2}{(A+C).l\left(\frac{A+C}{C}\right) - fr}$ s'uguaglia ad una grandezza negativa.

Per ben intendere il linguaggio misterioso dell'analisi, do principio dal cavare il valore di z, quando $p = \infty$. Poichè in tale incontro $\frac{fr^2}{(A+C)p} = 0$, avremo $(A+C).e^{\frac{-fr}{A+C}} - C = z$, e per conseguenza $e^{\frac{fr}{A+C}} = \frac{A+C}{z+C}$, ovvero $\frac{fr}{A+C} = l\left(\frac{A+C}{z+C}\right)$. Supponendosi $\frac{fr}{A+C} < l\left(\frac{A+C}{C}\right)$, dinotato colla lettera m un numero positivo maggiore dell'unità, si avrà $\frac{fr}{A+C} = \frac{1}{m} l\left(\frac{A+C}{C}\right)$; e quindi alla distanza $p = \infty$ dal centro della terra si avvererà la formola $\frac{1}{m} l\left(\frac{A+C}{C}\right) = l\left(\frac{A+C}{z+C}\right)$. Da cui si deduce $\frac{(A+C)^{\frac{1}{m}}}{C^{\frac{1}{m}}} = \frac{A+C}{z+C}$, ed indi $z+C = (A+C)^{1-\frac{1}{m}}.C^{\frac{1}{m}}$. Ora $z+C$ sta di mezzo fra C, ed $A+C$. È maggiore di C, perchè per essere uguale a C, farebbe d'uopo che nell'omogeneo di comparazione fosse $A = 0$: è minore di $A+C$, perchè per pareggiare essa quantità, bisognerebbe che nel detto omogeneo la grandezza $(A+C)^{1-\frac{1}{m}}$ in cambio di essere moltiplicata per $C^{\frac{1}{m}}$, fosse moltiplicata per $(A+C)^{\frac{1}{m}}$. Essendo dunque $z+C$ maggiore di C, e minore di $A+C$, si inferisce essere z minore di A: ma il peso della colonna di aria dalla superficie del mare sino alla sublimità $p = \infty$ s'uguaglia a $gA - gz$; dunque il detto peso è più piccolo di gA, e per conseguenza il peso della mentovata colonna non basta per far equilibrio colla colonna di mercurio di altezza a, mentre il barometro si colloca sulla superficie del mare.

Il perchè egli è necessario trascendere la lunghezza della colonna aerea, e farla diventare più che infinita. Ma si richiederà qualmente ciò si possa ottenere. Dal centro C della terra (Fig. 2.) s'intenda tirata la linea retta ECD, la quale sia prolungata all'infinito tanto dalla parte CD delle p positive, quanto dalla parte CE delle p negative, e sia CB il raggio della terra. Divenuta infinita la colonna aerea AD, si fa un repentino salto familiare alla Geometria dall'infinito positivo CD al negativo CE, e si continua la colonna d'aria procedendo da E verso C sino alla distanza dal centro $= CE = p = \frac{fr^2}{(A+C).l\left(\frac{A+C}{C}\right) - fr}$, a cui corrisponde $z = 0$, come ho notato di sopra, ed è l'estremo confine dell'atmosfera nella supposizione di $(A+C).l\left(\frac{A+C}{C}\right) > fr$. La legge della gravità acceleratrice in ragione inversa dei quadrati delle distanze richiede, che essendo positivi i quadrati anche delle distanze negative per esempio

CF

CF, CE, la gravità suddetta spingano sempre da D verso E. Il peso dunque della colonna aerea FE tenderà da F verso E, e nel punto E infinitamente lontano da C si agguaglierà a $gz = (gA+gC)\cdot e^{\frac{-fv}{A+C}} - gC$. Con una specie di magia matematica si unisca questo peso con quello $= gA - (gA+gC)\cdot e^{\frac{-fv}{A+C}} + gC = gA - gz$ della colonna d'aria DB, onde si formi la somma gA, colla quale fa equilibrio la colonna di mercurio, la cui altezza $= a$, ed il peso $= gA$, quando il barometro si pone nel sito B.

Ognuno egualmente capisce, che l'ipotesi di $(A+C)\cdot l\left(\frac{A+C}{C}\right) > fv$ appartiene soltanto alla Geometria, e non può trasferirsi alla Fisica. La legge delle forze inversamente proporzionali ai quadrati delle distanze è abbracciata dalla Natura; e mostrandoci questa fisicamente impossibile, che la quantità $(A+C\cdot l\left(\frac{A+C}{C}\right)$ o superi, o agguagli fv; perchè l'altezza dell'atmosfera diverrebbe o più che infinita, o infinita; chiara si scopre la conseguenza, dover essere $(A+C)\cdot l\left(\frac{A+C}{C}\right) < fv$. Esige ciò necessariamente, che a C convenga un valore maggiore di quello, che le competerebbe, fingendo $(A+C)\cdot l\left(\frac{A+C}{C}\right) = fv$, che non difficilmente si può determinare col computo.

Per facilitare un tal computo, suppongo C fisicamente trascurabile riguardo ad A, onde ne risulti $A\, l\left(\frac{A}{C}\right) = fv$, o sia $\frac{fv}{A} = l\left(\frac{A}{C}\right)$. Poichè $l\left(\frac{A}{C}\right)$ è un logaritmo iperbolico, fatta l'osservazione che il logaritmo di $\frac{A}{C}$ preso dalle tavole, che dinoto per $L\left(\frac{A}{C}\right)$, moltiplicato per 2,3025850 logaritmo iperbolico della decina si agguaglia a $l\left(\frac{A}{C}\right)$, avremo $\frac{fv}{A} = 2{,}3025850\, L\frac{A}{C}$, o pure $\frac{fv}{A\cdot 2{,}3025850} = L\frac{A}{C}$.

Sappiamo per la sperienza del Cotes essere $f = \frac{1}{11900}$, ed il Newton stabilisce $v =$ a piedi parigini 19695539 = poll. 236346468. Si faccia inoltre $A =$ poll. 28. Queste determinazioni ci danno

$\frac{236346468}{11900\cdot 28\cdot 2{,}3025850} = L\frac{28}{C}$, e ridotto il calcolo, $3{,}0805838 = L\frac{28}{C}$. Ora

$L\,1204 = 3{,}0806265$
$L\,1203 = \underline{3{,}0802656}$
e la loro differenza $\quad 3609$

Log. trovato $= 3{,}0805838$
$L\,1203 = \underline{3{,}0802656}$
Differenza $= \quad 3182$

Si inferisce essere $3{,}0805838 = L\left(1203 + \frac{3182}{3609}\right)$, e quindi $\frac{28}{C} = 1203 + \frac{3182}{3609} = \frac{4344809}{3609}$, e perciò $\frac{3609\cdot 28}{4344809} = \frac{101052}{4344809} =$ linee $\frac{1212624}{4344809} =$ linee $0{,}2790922 = C$. L'esatto

valore

valore di C corrispondente a $z = o$, ed a $p = \infty$, è una mica maggiore di quello, che ho determinato testè, supponendo C trascurabile rispettivamente ad A. E conciossiachè l'altezza dell'atmosfera abbia ad esser finita, spetterà a C una misura ancora più grande, che si stabilirebbe, se fosse nota la sublimità, a cui l'atmosfera si estende.

Or ecco stabilita una fisica verità, che l'aria non compressa è fornita della densità $= \frac{fC}{A+C}$, e che questa dee certamente aver una grandezza maggiore di quella, che si determinerebbe ponendo $(A+C)\, l\left(\frac{A+C}{C}\right) = fr$, la quale incorrerebbe nell'assurdo, ch'esser dovesse infinita l'altezza dell'atmosfera.

Mi inoltro a rintracciare il valore di z, quando è infinitamente piccola la distanza p dal centro della terra. In tal circostanza si avrà la formola $(A+C)\cdot e^{\frac{fr^2}{(A+C)\cdot p}} = z$, e per conseguenza $\frac{fr^2}{(A+C)\cdot p} = l\left(\frac{z}{A+C}\right)$. La quantità $\frac{fr^2}{(A+C)\cdot p}$ è infinita, e perciò è tale altresì la grandezza eguale $l\left(\frac{z}{A+C}\right)$: ma il numero è trascendentemente più grande del suo logaritmo infinito; dunque $\frac{z}{A+C}$ è immensamente maggiore di $\frac{fr^2}{(A+C)\cdot p}$, e quindi anche z sarà tale in riguardo ad $\frac{fr^2}{p}$. Non ci dobbiamo maravigliare, che per equilibrare il peso dell'atmosfera di altezza finita, si richieda nel centro della terra una colonna di mercurio immensamente lunga fornita della gravità acceleratrice $= g$. Nella infinitesima distanza dal centro ella è infinita la gravità, e la densità dell'aria, e da questa cagione procede la lunghezza trascendentemente infinita $= z$ della mentovata colonna di mercurio.

Presa negativa la distanza $= p$ dal centro, abbiamo $(A+C)\cdot e^{\left(\frac{-fr}{A+C} - \frac{fr^2}{(A+C)\cdot p}\right)} - C = z$. Attenendomi all'ipotesi confacente alla fisica, che $\frac{fr}{A+C}$ sia maggiore di $l\left(\frac{A+C}{C}\right)$, ho stabilito che ad una finita distanza dal centro, ch'io nomino P, z si annulla, onde si abbia $(A+C)\cdot e^{\left(\frac{-fr}{A+C} + \frac{fr^2}{(A+C)\cdot P}\right)} - C = o$, e perciò $(A+C)\cdot e^{\left(\frac{-fr}{A+C} + \frac{fr^2}{(A+C)\cdot P}\right)} = C$. Si cavi la conseguenza, che quando la distanza p è negativa; sarà $(A+C)\cdot e^{\left(\frac{-fr}{A+C} - \frac{fr^2}{(A+C)\cdot p}\right)} < C$, e quindi $z = (A+C)\cdot e^{\left(\frac{-fr}{A+C} - \frac{fr^2}{(A+C)\cdot p}\right)} - C$ si troverà negativa. Egli è certo, che avendo la gravità e di qua, e di là dal centro la medesima direzione, il peso dell'aria si accresca passato il centro, e si richieda una più lunga colonna di mercurio dotato della gravità g per equilibrarla. Come dunque ci si presenta z negativa, e finita. L'enigma si scioglie collo stesso artificio usato di sopra.

La curva, le cui coordinate (Fig. 2.) $CD = p$, $DE = z$, ha due rami NAEG, LHK, ai quali serve di assintoto la retta GCK. A $CA = p = r$ corrisponde $AA = z = A$. Divenendo $p = o$ nel centro C,

z ascende all'infinito, e ci vuole la colonna di mercurio CG di lunghezza infinita, e dotata di gravità costante per far equilibrio colla colonna aerea CN di altezza determinata, alla sommità della quale è $z = 0$, e l'atmosfera finisce. Il peso accresciuto della colonna d'aria CF esige una più lunga colonna di mercurio; e giacchè era infinita la lunghezza CG della colonna relativa a $p = 0$, la lunghezza, che si cerca, della colonna di mercurio appropriata a $CF = -p$ esser debbe più che infinita. Descritta l'ordinata $FH = -z$, si tiri HI parallela ad FN; e si agguaglierà a CG è KI la lunghezza della colonna di mercurio, la cui gravità costante $= g$, che forma equilibrio colla colonna aerea, la cui lunghezza FN.

Posto che si supponga, che la gravità in ragione inversa dei quadrati delle distanze sempre tenda al centro, di modo che passato il centro spinga da F verso C; allora a pari distanze CD, CF corrisponderanno colonne di mercurio egualmente alte, e servirà ad ambo i casi la stessa formola, dovendosi considerare in qualità di positiva la p anche di là dal centro.

Finora ho misurato la pressione dell'aria col peso di una conveniente colonna di mercurio dotata della gravità costante g, ch'è quella, che corrisponde alla distanza r dal centro. Cerchiamo presentemente l'altezza s della colonna di mercurio dentro il barometro collocato alla distanza p dal centro terrestre, le particole del qual mercurio siano fornite della gravità conveniente alla relativa loro lontananza dal centro predetto, la qual colonna faccia equilibrio col peso dell'atmosfera superiore. Avendo trovato generalmente il peso di essa colonna $\frac{gr^n}{(n-1)\cdot p^{n-1}} - \frac{gr^n}{(n-1)\cdot(p+s)^{n-1}}$, ed avendolo stabilito uguale a gz, troveremo nella ipotesi di $n = 2$, $\frac{r^2 s}{p^2+ps} = z$, e ne dedurremo $s = \frac{p^2 z}{r^2-pz}$, e sostituito il valore di z,

$$\frac{(A+C)\cdot p^2\cdot e^{-\frac{fr}{A+C}+\frac{fr^2}{(A+C)\cdot p}} - Cp^2}{r^2-(A+C)\cdot p\cdot e^{-\frac{fr}{A+C}+\frac{fr^2}{(A+C)\cdot p}} + Cp} =$$

A $z = 0$ ci corrisponde $s = 0$, e ciò succede o ad una finita distanza p dal centro, se $\frac{fr}{A+C}$ è maggiore di $l\left(\frac{A+C}{C}\right)$, o ad una infinita distanza, se $\frac{fr}{A+C} = l\left(\frac{A+C}{C}\right)$, o ad una distanza negativa, se $\frac{fr}{A+C} < l\left(\frac{A+C}{C}\right)$.

In quest'ultima supposizione, quando $p = \infty$, s ha un valore finito $= (A+C)\cdot e^{-\frac{fr}{A+C}} - C$. Se tutta la colonna di mercurio fosse fornita della gravità $\frac{gr^2}{p^2}$ propria della distanza p dal centro, si troverebbe $s = \frac{p^2 z}{r^2}$: Ma decrescendo la gravità delle particole del mercurio,

secondochè

secondochè si allontanano maggiormente dal centro mentovato, egli è certo che la lunghezza s ha da salire ad una grandezza incomparabilmente maggiore. Si formava qualche idea della immensità di la sua misura trasformando la quantità $\frac{p^2 z}{v^2 - pz} = s$ in una serie col mezzo di iterate divisioni, le quali ci mostreranno $s = \frac{p^2 z}{v^2} + \frac{p^3 z^2}{v^4} + \frac{p^4 z^3}{v^6} + \&c.$ Per far dunque equilibrio colla colonna di aria FE (Fig. 1.) si renderebbe necessaria una colonna di mercurio di lunghezza trascendentemente infinita. Svanirà la meraviglia di questo apparente paradosso, qualora si rifletta, che il peso di cotale immensa colonna è finito, ed $= gz$, cioè a dire al peso della colonna aerea FE.

Merita riflessione l'ambiguità del valore di $\frac{p^2 z}{v^2 - pz}$ secondo la varietà delle circostanze. In moltissimi casi si agguaglierebbe ad una quantità negativa, quando p, e z sono positive, e $pz > v^2$. Nel nostro caso frattanto ho fatto chiaramente vedere uguagliarsi $s = \frac{p^2 z}{v^2 - pz}$ ad una grandezza più che infinita. Se fosse $v^2 = pz$, ascenderebbe all'infinito, essendo $v^2 - pz = 0$. Acciocchè s vie più cresca, bisogna che $v^2 - pz$ continui a calare; il che addiviene passando dal nulla al negativo, onde $\frac{p^2 z}{v^2 - pz} = s$ pareggi una grandezza più che infinita.

Gli esperimenti ci documentano essere $s = a$, quando $p = v$. In tale incontro il peso della colonna di mercurio, la cui altezza $= a$, si agguaglierà a $\frac{gv^2 a}{v^2 + va} = \frac{gva}{v+a} = gz = gA$. Poichè a è fisicamente trascurabile in riguardo ad v, passerà fisica agguaglianza fra a ed A, potendosi con fisica adequazione supporre, che per tutto il tratto a si mantenga la stessa gravità $= g$.

Ho già notato, che quando $v^2 = pz$, o sia $\frac{v^2}{p} = z$, l'altezza s del mercurio diviene infinita. Succede ciò, qualora p è minore di v. E voglia il vero nella formola $(A+C) \cdot e^{\frac{-fv}{A+C} + \frac{fv^2}{(A+C) \cdot p}} - C = z$ si sostituisca $\frac{v^2}{p}$ in cambio di z, e dopo le convenienti operazioni si troverà $\frac{fv}{A+C} \cdot (v-p) = l. \frac{v^2 + Cp}{(A+C) \cdot p}$, equazione a cui soddisfa un valore positivo di $p < v$.

Si assegni a p una grandezza positiva ancora più picciola, e la formola $(A+C) \cdot e^{\frac{-fv}{A+C} + \frac{fv^2}{(A+C) \cdot p}} - C = z$ c'insegna, che z crescerà, e diverrà maggiore di $\frac{v^2}{p}$. In tali circostanze il divisore $v^2 - pz$ della formola $\frac{p^2 z}{v^2 - pz} = s$ diverrà negativo, e l'altezza s del mercurio monterà al più che infinito.

Giunga finalmente p ad essere infinitamente picciola, onde s'abbia $(A+C) \cdot e^{\frac{fv^2}{(A+C) \cdot p}} = z$, e quindi $\frac{fv^2}{(A+C) \cdot p} = l\left(\frac{z}{A+C}\right)$. Si raccoglie da questa

formola

formola essere immensamente più grande di $\frac{r^2}{p}$, e conseguentemente pure immensamente maggiore di r^2. Il perchè in questo incontro il più che infinito valore di $s = \frac{p^2 z}{r^2 - p^2}$ si aumenterà a dismisura.

Resta da considerare il caso di p negativa, a cui, come ho già osservato corrisponde z altresì negativa. Avremo dunque $s = \frac{-p^2 z}{r^2 + p^2}$, formola che manifesta riuscire negativa ancor s. Sia (Fig. 1.) CD l'infinitamente infinita altezza, a cui si alzerebbe il mercurio nel barometro collocato nel centro della terra. Suppongasi parimente immensamente infinita la linea CE, e se ad un dato valore di p negativa si riferisca $-s = CF$, sarà $CD + EF$ la lunghezza della colonna di mercurio, che farà equilibrio col peso dell'atmosfera.

Se passato il centro le forze divenissero negative, le altezze del mercurio e di quà, e di là dal centro riuscirebbero eguali a pari distanze dal centro medesimo.

La Fisica esige, che sia finita l'altezza dell'atmosfera, e che per conseguenza sendo $\frac{fr}{A+C} > l\frac{A+C}{C}$, z, ed s si annullino ad una distanza p finita dal centro terrestre. Calando p, crescono z, ed s, e finalmente divengono fisicamente amendue uguali ad A alla distanza r dal detto centro. E qui finisce la legge delle forze inversamente proporzionali ai quadrati delle distanze, avendo dimostrato il Cavalier Newton, che dentro il corpo della terra le forze seguono la ragione della distanza dal centro. Per la qual cosa giudico espediente l'aggiungere un terzo esempio, in cui s'indaghino i valori di z, e di s nella ipotesi mentovata di forze [illegible].

Esempio III.

Supponendo le forze proporzionali alla distanza dal centro, abbiamo $n = -1$, e la formola generale esprimente il valore di z prende il seguente aspetto $(A+C).e^{\frac{fr}{2(A+C)} - \frac{fp^2}{2r(A+C)}} - C = z =$ [illegible]

Si annulleranno z, ed s, quando si abbia $(A+C).e^{\frac{fr}{2(A+C)} - \frac{fp^2}{2r(A+C)}} = C$, e perciò $\frac{fr}{2(A+C)} - \frac{fp^2}{2r(A+C)} = l\left(\frac{C}{A+C}\right)$, ovvero $\frac{fp^2}{2r(A+C)} - \frac{fr}{2(A+C)} = l\left(\frac{A+C}{C}\right)$, e finalmente $\pm p = \sqrt{\left(\frac{2r(A+C)}{f}\cdot\left(\frac{fr}{2(A+C)} + l\left(\frac{A+C}{C}\right)\right)\right)}$. Se l'aria non compressa sia dotata di una finita densità, siccome richiede la Fisica, uguale ad $\frac{fC}{A+C}$, e per conseguenza sia finito il valore di C, starà parimente dentro i limiti del finito la distanza dal centro $\pm p$, alla quale z, ed s svaniscono. Che se suppongasi $C = 0$, si troverà $\pm p = \sqrt{\left(\frac{2rA}{f}\cdot l\left(\frac{A}{0}\right)\right)} = \infty$, e bisognerà trasportare il barometro ad una distanza infinita, acciocchè la lunghezza s della colonna di mercurio si uguagli a nulla.

Avvicinando il barometro alla superficie della terra, cresceranno z,

ed

ed s, ed a livello del mare sarà $z = A$, $s = a$, ed avvenendosi la formola $A = \frac{2va + a^2}{2v}$, ed essendo a^2 fisicamente trascurabile rispettivamente a $2va$, si troverà con fisica adequazione $A = z = a = s$.

Divenga $\pm p$ minore di v, e seguiteranno a crescere z, ed s, e per ultimo qualora $\pm p = o$, ci si presenterà $(A+C) \cdot e^{\frac{fv}{2 \cdot (A+C)}} - C = z = \frac{s^2}{2v}$; e z, ed s giungeranno alla massima grandezza.

Ristringendo le cose dette in poche parole, dall'altezza a cui si estolle l'atmosfera sino alla superficie del mare vale la legge della gravità in ragione inversa dei quadrati delle distanze dal centro terrestre. L'altezza del mercurio nel barometro si agguaglia a nulla nella predetta sublimità, dove (avverandosi la condizione, che sia $fv > (A+C)\, l\left(\frac{A+C}{C}\right)$), la densità dell'aria non compressa si agguaglia ad $\frac{fC}{A+C}$. Va crescendo essa altezza, secondochè il barometro si avvicina alla terra, e collocato sulla superficie del mare, l'altezza del mercurio trovasi $= a$.

Ponendo il barometro in sito inferiore al livello del mare, si muta legge, e la gravità seguitano la ragione della distanza dal centro. Esige questa legge, che l'altezza del mercurio si aumenti sinatantochè perviene alla misura determinata dall'equazione $(A+C) \cdot e^{\frac{fv}{2 \cdot (A+C)}} - C = \frac{v^2}{2v}$, quando $p = o$.

Progredendo di là dal centro della terra, fa di uopo capovoltare il barometro, perchè la gravità diventa negativa, ed a qualunque distanza dal centro corrisponderà la stessa altezza di mercurio, che competeva ad una pari distanza presa di qua dal centro predetto.

Esempio IV.

La generale integrazione della formola differenziale $\frac{fv^n dp}{(A+C) \cdot p^n} = \frac{-dz}{z+C}$ non vale per l'ipotesi di $n = 1$, che ci darebbe $(A+C) \cdot e^{\frac{fv}{o \cdot (A+C)} - \frac{fv}{o \cdot (A+C) \cdot p^o}} - C = z$. Suppone la detta ipotesi le forze acceleratrici in ragione inversa della distanza dal centro. In questo caso egli è d'uopo [illegible] la formola differenziale, che prende il seguente aspetto $\frac{fv\, dp}{(A+C) \cdot p} = \frac{-dz}{z+C}$, la quale integrata ci somministra $\frac{fv}{A+C} \cdot lp = B - l(z+C)$: ma quando $p = v$, $z = A$; dunque $B = \frac{fv}{A+C} \cdot lv + l(A+C)$, e conseguentemente $\frac{fv}{A+C}\, lp = \frac{fv}{A+C} \cdot lv + l(A+C) - l(z+C)$ o sia $\frac{fv}{A+C} \cdot l\left(\frac{p}{v}\right) = l\left(\frac{A+C}{z+C}\right)$, e finalmente dopo i necessarj calcoli $(A+C) \cdot \left(\frac{v}{p}\right)^{\frac{fv}{A+C}} - C = z$.

L'integrale della formola differenziale $\frac{gv\, ds}{p+s}$ adattata al caso di $n = 1$, in cui p si suppone costante, cioè $gv\, l\left(\frac{p+s}{p}\right)$ esprime il peso della colonna di mercurio di lunghezza s posta al di sopra della distanza p dal centro della terra. E poichè $gv\, l\left(\frac{p+s}{p}\right) = g$ [illegible] avremo

A+C

$(A+C)\cdot\left(\frac{v}{p}\right)^{\frac{fv}{A+C}} - C = z = v\,l\left(\frac{p+s}{p}\right)$ . . . . $\frac{A+C}{fv}$

Si agguaglieranno a nulla z, ed s, qualora sia $v\cdot\left(\frac{A+C}{C}\right)^{\frac{A+C}{fv}} = p$, ed il valore di p ascenderà all'infinito posta $C=0$

Approssimandosi il barometro alla superficie del mare, s'aumenteranno z, ed s; e quando $p=v$, sarà $z=A$, $s=a$; e prossimamente $z=A=s=a$, adeguandosi $v\,l\left(\frac{v+s}{v}\right)$ ad s, stante la minutezza di s in riguardo ad v, ed essendo in tal circostanza $l\left(\frac{v+s}{v}\right)=\frac{s}{v}$ con fisica adequazione.

Seguiti p a calare, e cresceranno z, ed s, sintantochè diverranno infiniti all'annullarsi di p. Che ciò avvenga di z, ella è cosa patente. In riguardo ad s avremo, supposta p minima, $\left(\frac{A+C}{v}\right)\cdot\left(\frac{v}{p}\right)^{\frac{fv}{A+C}} = l\left(\frac{s}{p}\right)$, e perciò $e^{\left(\frac{A+C}{v}\right)\left(\frac{v}{p}\right)^{\frac{fv}{A+C}}} = \frac{s}{p}$, e finalmente $p\cdot e^{\left(\frac{A+C}{v}\right)\cdot\left(\frac{v}{p}\right)^{\frac{fv}{A+C}}} = s$. Poichè $e^{\left(\frac{A+C}{v}\right)\cdot\left(\frac{v}{p}\right)^{\frac{fv}{A+C}}}$ è immensamente più grande di $\left(\frac{A+C}{v}\right)\cdot\left(\frac{v}{p}\right)^{\frac{fv}{A+C}}$, se ne deduce s infinitamente maggiore di $p\cdot\left(\frac{A+C}{v}\right)\cdot\left(\frac{v}{p}\right)^{\frac{fv}{A+C}} = (A+C)\cdot\left(\frac{v}{p}\right)^{\frac{fv}{A+C}-1}$: ma questa grandezza è infinita; dunque tanto più infinita sarà la grandezza di s. Di sopra ho stabilito $A=$ pell. 26, $f=\frac{1}{11900}$, $v=$ pell. 2363 4.5 4 6 6, e C maggiore di linee 0,2794972. Pongasi $C=$ lin. $1=$ pell. $\frac{1}{12}$, e si troverà $(A+C)\cdot\left(\frac{v}{p}\right)^{\frac{fv}{A+C}-1} = \left(26+\frac{1}{12}\right)\cdot\left(\frac{2363\,4.5\,4\,6\,6}{0}\right)^{206+\frac{72324}{334392}}$ quantità immensamente infinita.

Passato il centro, senza por mano nella formola $(A+C)\cdot\left(\frac{v}{p}\right)^{\frac{fv}{A+C}} - C = z$, basta considerare anche di là dal centro le distanze, e le gravità tendenti al centro stesso come positive, e si torneranno a scoprire i medesimi valori di z, e di s come di qua dal centro.

Esempio V.

Supponendo n minore della unità, la formola prenderà il sottoposto aspetto $(A+C)\cdot e^{\frac{fv}{(1-n)\cdot(A+C)} - \frac{f v^n p^{1-n}}{(1-n)\cdot(A+C)}} - C = z = -\frac{v^n p^{1-n}}{1-n} + \frac{v^n\cdot(p+s)^{1-n}}{1-n} = \frac{v^n}{1-n}\left((p+s)^{1-n} - p^{1-n}\right)$.

Pongasi $n=\frac{1}{2}$, e ne risulterà $(A+C)\cdot e^{\frac{2fv - 2fv^{\frac{1}{2}}p^{\frac{1}{2}}}{A+C}} - C = z = 2v^{\frac{1}{2}}\left((p+s)^{\frac{1}{2}} - p^{\frac{1}{2}}\right)$.

Svaniranno z, ed s, qualora sia $p = \left(v^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{A+C}{2fv^{\frac{1}{2}}}\right)\cdot l\left(\frac{A+C}{C}\right)\right)^2$, ed un tale valore sarà infinito, posta $C=0$.

Cresceranno z, ed s accostando il barometro alla superficie del mare, e quando $p=v$, si troverà $A=z=2v^{\frac{1}{2}}\left((v+a)^{\frac{1}{2}} - v^{\frac{1}{2}}\right)$. Ora sendo a fisicamente minima in riguardo ad v, $(v+a)^{\frac{1}{2}}$ si adegua ad $v^{\frac{1}{2}} + \frac{a}{2v^{\frac{1}{2}}}$, e quindi fisicamente $A=z=a=s$.

Divenga $p=0$, e ne nascerà $(A+C)\cdot e^{\frac{2fv}{A+C}} - C = z$, e non si richiederà

salvochè

salvochè un peso finito per far equilibrio colla pressione dell' atmosfera dal centro sino al suo termine estremo.

Sta parimente in questo incontro dentro i limiti del finito il valore di s; imperciocchè sendo $z = 2r^{\frac{1}{2}}s^{\frac{1}{2}}$, se ne deduce $s = \frac{z^2}{4r}$, ed essendo z quantità finita, si scopre altresì tale $\frac{z^2}{4r} = s$.

Se passando oltre al centro, la p si considera come negativa, i valori di z e di s divengono immaginarj, essendo tale la grandezza $p^{\frac{1}{2}}$. Addiviene ciò in tutti que' casi, nei quali è pari il denominatore della frazione $1-n$, il che si verifica nell' assunto esempio di $1-n = \frac{1}{2}$.

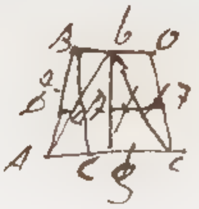
Che se qualmente richieda la legge della forza tendente sfericamente ad un centro, la distanza in qualunque direzione si prende sempre come positiva; a pari lontananza di qua, e di là dal centro corrisponderanno uguali valori di z, e di s.

Degli Elastri di massa finita.

NB. Veggasi la Dissertazione sotto lo stesso
Titolo posta a pag. 159. del
Tomo I. della Raccolta di
varj Opuscoli interessanti &c.
Firenze
1771
Presso Domenico Marzi e
Compagni;

e la prima delle due Dissertazioni
Fisico-Matematiche di Giambatista
Nicolai
stampata in Padova
1772.

Degli elastri di massa finita



Sia ~~primieramente~~ l'elastro ABC (fig. 1) formato da lati eguali AB, CB, e sia $AB = CB = a$, e la massa di ciascun lato $= m$. Considero l'ipotesi più semplice dell'angolo BAC, ovvero BCA retto.

Giacché in A si suppone un ostacolo immobile, il lato AB passerà nella posizione Ab facendo un minimo moto, ed i punti B, D scorreranno gli spazj Bb, Dd paralleli ad AC. La velocità del punto B si chiamerà ~~u~~, ed essendo le velocità dei punti B, D come gli spazietti Bb, Dd, e questi come AB : AD, avremo nominando $AD = x$ $AB = a : AD = x :: u : \frac{ux}{a}$

ed il quarto termine esprimerà la velocità dell'elemento $Dd = \frac{m\,dx}{a}$ dell'elastro AD. Avremo dunque la sua forza viva $\frac{m\,dx}{a} \times \frac{u^2x^2}{2a^2} = \frac{mu^2}{2a^3} \cdot x^2 dx$, e l'integrale $\frac{mx^3}{3a^3} \cdot \frac{u^2}{2}$ mi darà la forza viva della porzione di elastro AD. Fatto poi $x = a = AB$, ci si presenterà la forza viva del semielastro AB $= \frac{m}{3} \cdot \frac{u^2}{2}$.

Per iscoprire la forza viva dell'altro semielastro BC, quando è giunto nel sito bc, considero in esso due moti, cioè uno comune al moto ad $=$ u col quale, parallelo a se stesso, scorre lo spazio $cc = Bb$, e l'altro col quale si gira intorno il punto c espresso dal triangolo cζb ... Nominiamo $c\gamma = x$, e base $\zeta b = Bb$. Ne risulta la velocità di giramento del punto $\gamma = \frac{ux}{a}$: ma inoltre il detto punto ha la velocità ~~u~~ comune col punto c; dunque la totale velocità

$= 2\dot{u} - x\frac{\dot{u}}{a} = \frac{2a - x}{a}\cdot\dot{u}$, ed il suo semi quadrato $= \frac{4a^2 - 4ax + x^2}{a^2}\cdot\frac{\dot{u}^2}{2}$. Quindi la forza viva della particola $Zt = \frac{m\,dx}{a}\cdot\frac{4a^2 - 4ax + x^2}{a^2}\cdot\frac{\dot{u}^2}{2} = \frac{m\dot{u}^2}{2a^3}\cdot(4a^2dx - 4ax\,dx + x^2dx)$, ed integrando $\frac{m\dot{u}^2}{2a^3}\cdot\left(4a^2x - 2ax^2 + \frac{x^3}{3}\right)$ sarà la forza viva della parte di elastro BZ. Mettendo poi $x = a$, averemo la forza viva del mezzo elastro $BC = \frac{m\dot{u}^2}{2}\cdot\left(2a + \frac{a}{3}\right) = ma\frac{7}{3}\cdot\frac{\dot{u}^2}{2}$. Si aggiunga a questa la forza viva del mezzo elastro $AB = \frac{ma}{3}\cdot\frac{\dot{u}^2}{2}$, e ne risulterà l'intera forza viva dell'elastro $ABC = \frac{8ma}{3}\cdot\frac{\dot{u}^2}{2} = \frac{2ma}{3}\cdot\frac{4\dot{u}^2}{2}$.

~~che qui egli si discopre riflettere, che essendo $= \dot{u}$ la velocità del punto B che scorre lo spazio BC, e velocità del punto C sarà $= 2\dot{u}$, perchè da esso si passa lo spazio AC = 2BC~~

Dunque la velocità del punto $C = 2\dot{u} = U$, e la massa totale dell'elastro $ABC = 2ma = M$, e ne risulta ora la scoperta forza viva $= \frac{M}{3}\cdot\frac{U^2}{2}$.

Se dunque si supponga un elastro egualmente rigido, ma immateriale, e che questo si paragoni col materiale ABC, quando ambedue si caveranno aperti del pari, onde la elasticità abbia eguale la stessa azione, il punto C in ambedue sarà fornito della stessa velocità $2\dot{u} = U$, qualora la massa dell'elastro materiale sia $= 2ma = M$, ed al punto C dell'elastro privo di massa si applichi la terza parte $\frac{2ma}{3} = \frac{M}{3}$, cagionandosi in ambo i casi la medesima forza viva $\frac{2ma}{3}\cdot\frac{4\dot{u}^2}{2} = \frac{M}{3}\cdot\frac{U^2}{2}$.

Passo all'elastro doppio ABCDE (fig. 2).

La parte

La parte CD si muove colla velocità $2u$ dal punto C, ed inoltre si gira intorno il punto C sì fattamente, che il punto D è fornito della velocità u di giramento. Un punto alla distanza x dal punto C si girerà colla velocità $\frac{xu}{a}$, facendo la totale velocità di esso punto $= 2u + \frac{xu}{a} = \frac{2a+x}{a} \cdot u$, ed il suo quadrato della stessa $\frac{4a^2+4ax+x^2}{a^2} \cdot \frac{u^2}{2}$. Dunque la forza viva della particola $\frac{m\,dx}{a}$ alla detta distanza $= \frac{m\,dx}{a} \cdot \frac{4a^2+4ax+x^2}{a^2} \cdot \frac{u^2}{2}$, ed integrando avremo la forza viva del pezzo di elastro, la cui lunghezza x, $= \frac{4ma^2x+2max^2+\frac{1}{3}mx^3}{a^3} \cdot \frac{u^2}{2}$, e quando $x=a$, troveremo la forza viva del semielastro CD $= 4m+2m+\frac{1}{3}m \cdot \frac{u^2}{2}$

$= \frac{19}{3}m \cdot \frac{u^2}{2}$

Il semielastro DA ~~[illegible]~~, che cammina ~~colla velocità [illegible] dal punto D, e che si gira intorno il punto D, [illegible] il punto abbia la velocità di giramento~~ $= u$ da A verso D, si possono ~~[illegible]~~ immaginare, che ~~[illegible]~~ viaggi parallelo a se stesso, colla velocità $4u$ dal punto A, e che si rivolga intorno ad esso da D verso B in guisa tale che al punto D competa la velocità di giramento $= -u$. ~~[illegible] [illegible] [illegible] [illegible]~~. Un punto situato alla distanza x dal punto A si girerà colla velocità $-\frac{xu}{a}$, e sarà fornito della velocità assoluta $4u - \frac{xu}{a} = \frac{4a-x}{a} \cdot u$

Il perchè la sua forza viva

$= \frac{m\,dx}{a} \cdot \frac{16a^2-8ax+x^2}{a^2} \cdot \frac{u^2}{2}$. L'integrazione ne dà la forza viva del ~~semielastro~~ pezzo di elastro di lunghezza x

=

$\frac{16ma^2x - 4max^2 + \frac{1}{3}mx^3}{a^3} \cdot \frac{u^2}{2}$, e posta $x = a$

avremo la forza viva del semplice elastro AD =

$\overline{16m - 4m + \frac{1}{3}m} \times \frac{u^2}{2} = \frac{37}{3}m \cdot \frac{u^2}{2}$; quindi

la forza viva dell'elastro BCDE =

$\overline{\frac{19m}{3} + \frac{37m}{3}} \cdot \frac{u^2}{2} = \frac{56m}{3} \cdot \frac{u^2}{2}$, e quella

dell'elastro doppio ABCDE =

$\overline{\frac{4m}{3} + \frac{56m}{3}} \times \frac{u^2}{2} = \frac{64m}{3} \cdot \frac{u^2}{2} = \frac{4m}{3} \cdot \frac{16u^2}{2}$:

ma la velocità del punto E = 4u = U;

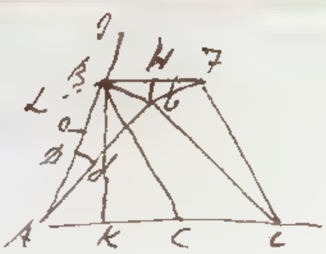
dunque la detta forza e la massa di tutto l'elastro = 4m = M; dunque la detta forza = $\frac{M}{3} \cdot \frac{U^2}{2}$, cioè a dire uguale alla terza parte della massa dell'elastro moltiplicata nel quadrato della velocità U del punto estremo E, conforme lo stesso si è trovato nel caso dell'elastro semplice ABC.

La stessa conseguenza si incontrerà considerando l'elastro triplo, quadruplo &c.

Non deggio tralasciar di riflettere, che posta costante la estensione a potenza di ciascun elastro, sarà costante ancora la velocità del punto estremo, o sia l'elastro semplice, doppio, o triplo &c.; imperciocché l'azione e la massa M crescono col numero degli elastri, e per conseguenza la velocità U essere dovrà costante.

Non è mica costante la velocità del punto B, perché se l'elastro è semplice si uguaglia ad $\frac{U}{2}$, se l'elastro è doppio ad $\frac{U}{4}$, se l'elastro è triplo ad $\frac{U}{6}$, e generalmente ad $\frac{U}{2n}$, esprimendo n il numero degli elastri

Degli elastri di massa finita.



Ora egli è di mestieri sciogliere il nostro problema generalmente.

E dando principio dal elastro semplice ABC (fig. 1) la forza viva della porzione AB si trova $= \frac{m}{3} \cdot \frac{u^2}{2}$

Per iscoprire la forza viva dell'altra parte BC, si tiri BH parallela ad AC, e sia GH normale a BH, e poscia si conduca BK normale ad AC, e si prolunghi AB verso I. L'angolo IBG è retto, e poichè IBH = BAK, si segue HBG = ABK. La velocità del punto B per le direzioni BG, BH, HG stanno come le dette linee; ma le dette linee si corrispondono come i seni degli angoli opposti; dunque chiamato φ l'angolo BAK = IBH = BGH, le linee BG, BH, HG si riferiranno in ragione delle quantità 1, $s.\varphi$, $c.\varphi$, essendo HBG il ~~[illegible]~~ complemento dell'angolo BGH $= \varphi$. Avremo dunque

$1 : s.\varphi :: BG : BH :: u : u s\varphi$

velocità del punto B per la direzione BH. Non altrimenti la velocità dello stesso punto per la direzione HG sarà $u c.\varphi$;

Il lato BC cammina per la direzione AC colla velocità $u s.\varphi$; e di più si gira intorno il punto C da B verso L in tal modo che si eguaglia ad u la velocità di giramento del punto B. Un ~~punto~~ elemento di massa $\frac{m dx}{a}$ alla distanza x dal punto C si gira colla velocità $\frac{ux}{a}$, ed è fornito per la direzione BH della velocità $-\frac{ux s.\varphi}{a}$ e per la direzione HG della velocità $= \frac{ux c.\varphi}{a}$.

Per la qual cosa

Per la qual cosa la totale velocità del detto punto per la direzione B.H. sarà $2us.\varphi - \frac{xu}{a}s.\varphi = \overline{2u - \frac{xu}{a}}\,s.\varphi$, e la velocità per la direzione HG $= \frac{xu}{a}c.\varphi$.

I semiquadrati di queste velocità saranno $\frac{\overline{4a^2-4ax+x^2}\cdot\overline{s.\varphi}^2}{a^2}\cdot\frac{u^2}{2}$, $\frac{x^2}{a^2}\overline{c.\varphi}^2\cdot\frac{u^2}{2}$, e quindi la forza viva del predetto elemento

$$= \frac{m\,dx}{a}\cdot\overline{\frac{4a^2-4ax+x^2}{a^2}\cdot\overline{s.\varphi}^2 + \frac{x^2}{a^2}\overline{c.\varphi}^2}\cdot\frac{u^2}{2},$$

e la forza viva della porzione di esso lato, la cui lunghezza x,

$$m\cdot\frac{\overline{4a^2x-2ax^2+\frac{1}{3}x^3}\cdot\overline{s.\varphi}^2+\frac{1}{3}x^3\cdot\overline{c.\varphi}^2}{a^3}\cdot\frac{u^2}{2}.$$

Posta $x=a$, avremo la forza viva del semilato BC

$m\cdot\overline{\frac{7}{3}\overline{s.\varphi}^2+\frac{1}{3}\overline{c.\varphi}^2}\cdot\frac{u^2}{2}$. Si aggiunga a quella la forza viva $=\frac{m}{3}\cdot\frac{u^2}{2}$ del semilato AB, e ne risulterà la forza viva intera

$$=\frac{m}{3}\cdot\overline{1+7\overline{s.\varphi}^2+\overline{c.\varphi}^2}\cdot\frac{u^2}{2}=\frac{m}{3}\cdot\overline{2+6\overline{s.\varphi}^2}\cdot\frac{u^2}{2}$$

Dunque $=U$ la velocità del punto $C=2us.\varphi$ onde si abbia $u=\frac{U}{2s.\varphi}$, ed $u^2=\frac{U^2}{4\overline{s.\varphi}^2}$.

Sarà pertanto la predetta forza viva

$$=\frac{m}{3}\cdot\overline{2+6\overline{s.\varphi}^2}\cdot\frac{U^2}{4\overline{s.\varphi}^2}=\frac{2m}{3\cdot4}\cdot\overline{\frac{1}{\overline{s.\varphi}^2}+3}\cdot\frac{U^2}{2}$$

$$=\frac{M}{3\cdot4}\cdot\overline{\frac{1}{\overline{s.\varphi}^2}+3}\cdot\frac{U^2}{2}$$

Se sia retto l'angolo $BAC=\varphi$, avremo come sopra la forza viva $\frac{M}{3}\cdot\frac{U^2}{2}$.

Dato che il detto angolo sia semiretto, avremo $s.\varphi=\frac{1}{\sqrt{2}}$, e ne risulterà la forza viva $=\frac{M}{3\cdot4}\cdot5\cdot\frac{U^2}{2}$

Prendendo q uguale all'angolo del triangolo equilatero, avremo $s.q = \frac{\sqrt{3}}{2}$, laonde la viva forza $= \frac{M}{3\cdot 4} \cdot \frac{\overline{4+3}}{3} \cdot \frac{u^2}{2} = \frac{M}{12} \cdot \frac{13}{3} \cdot \frac{u^2}{2}$

$= \frac{13}{36} M \cdot \frac{u^2}{2}$.

Che se fosse $s.q = \frac{1}{3}$, ne risulterebbe la forza viva $= \frac{M}{12} \cdot \overline{9+3} \cdot \frac{u^2}{2} = M \cdot \frac{u^2}{2}$, ed al punto C dell'elatere privo di inerzia si dovrebbe applicare una massa uguale a quella dell'elatere materiale, ed essendo da ambidue gli elateri una pari azione, ne nascerebbe la medesima forza viva $M \cdot \frac{u^2}{2}$.

La massa applicata al punto C dell'elatere immateriale supererà sempre più quella dell'elatere materiale secondochè $s.q$ diverrà di grado più piccolo, e finalmente qualora sia minimo il detto seno, la massa da collocarsi in C diverrà infinita.

Il lato CD (fig. 2) si muove parallelo a se stesso ~~colla velocità~~ per la direzione CD colla velocità $2u\, s.q$ del punto C, e di più si rivolga intorno al punto C da D verso H, talmente che la velocità di vertigine del punto D si agguagli ad u. Un punto dello stesso lato alla distanza x dal punto C si girerà colla velocità $\frac{xu}{a}$, ed avrà per la direzione CD la velocità $\frac{xu}{a} s.q$, e per la direzione normale ad AD da D verso AD la velocità $\frac{xu}{a} c.q$. Perchè l'intera velocità per la direzione parallela a CD sarà $2u\, s.q + \frac{xu\, s.q}{a} = \frac{\overline{2a+x}}{a} \cdot s.q \cdot u$ ed i semiquadrati delle due velocità

l'una

la una all'altra perpendicolare

$\frac{4a^2+4ax+x^2}{a^2} \cdot \overline{s.\varphi}^2 \cdot \frac{u^2}{2}$, $\frac{x^2 \cdot \overline{c.\varphi}^2}{a^2} \cdot \frac{u^2}{2}$. Scoprirassi dunque la forza viva dell'elemento $\frac{m\,dx}{a}$ alla lontananza x dal punto C

$= \frac{m\,dx}{a} \cdot \frac{4a^2+4ax+x^2}{a^2} \cdot \overline{s.\varphi}^2 + \frac{x^2 \cdot \overline{c.\varphi}^2}{a^2} \cdot \frac{u^2}{2}$. La cui integrazione mi dà la forza viva del pezzo di lato CD, la cui lunghezza x

$= m \cdot \frac{4a^2x+2ax^2+\frac{1}{3}x^3 \cdot \overline{s.\varphi}^2 + \frac{1}{3}x^3 \cdot \overline{c.\varphi}^2}{a^3} \cdot \frac{u^2}{2}$, la quale pareggerà la forza viva dell'intero lato, qualora sia $x = a$

$= m \cdot \overline{4+2+\frac{1}{3}} \cdot \overline{s.\varphi}^2 + \frac{1}{3}\overline{c.\varphi}^2 \cdot \frac{u^2}{2} =$

$m \cdot \frac{19}{3} \cdot \overline{s.\varphi}^2 + \frac{1}{3}\overline{c.\varphi}^2 \cdot \frac{u^2}{2}$.

Cammina il lato DC parallelo a se stesso per la direzione CD colla velocità del punto C $= 4u\,s.\varphi$, ed inoltre si gira intorno il punto C da D verso B colla velocità in riguardo al punto D $= u$. Un punto preso in esso lato alla distanza x dal punto C si gira colla velocità $\frac{xu}{a}$, e la velocità dello stesso punto per la direzione parallela ad CD si agguaglia a $-\frac{xu}{a}s.\varphi$. Il medesimo punto è dotato della velocità normale ad AD da D verso A $= \frac{xu}{a}c.\varphi$. Perciò le due velocità fra loro normali del mentovato punto saranno

$4u\,s.\varphi - \frac{xu}{a}s.\varphi = \frac{4a-x}{a} \cdot s.\varphi \cdot u$, $\frac{x}{a}c.\varphi \cdot u$, ed i loro semiquadrati

$\frac{16a^2-8ax+x^2}{a^2} \cdot \overline{s.\varphi}^2 \cdot \frac{u^2}{2}$, $\frac{x^2}{a^2}\overline{c.\varphi}^2 \cdot \frac{u^2}{2}$.

La forza viva dell'elemento $\frac{m\,dx}{a}$ alla distanza x dal punto C si agguaglierà

ad

ed $\frac{m\,dx}{a}\cdot\frac{\overline{16a^2-8ax+x^2}}{a^2}\cdot\overline{S.\varphi}^2+\frac{x^2}{a^2}\cdot\overline{C.\varphi}^2\cdot\frac{u^2}{2}$,
e colla integrazione troveremo la forza viva della porzione dell'elastro ED, la cui lunghezza x,
$= m\cdot\frac{16a^2x-4ax^2+\frac{1}{3}x^3\cdot\overline{S.\varphi}^2+\frac{1}{3}x^3\overline{C.\varphi}^2}{a^3}\cdot\frac{u^2}{2}$.
Il perchè ponendo $x=a$ ne risulterà la forza viva del semielastro ED
$= m\cdot\overline{12+\frac{1}{3}}\cdot\overline{S.\varphi}^2+\frac{1}{3}\overline{C.\varphi}^2\cdot\frac{u^2}{2} =$
$m\cdot\frac{37}{3}\overline{S.\varphi}^2+\frac{1}{3}\overline{C.\varphi}^2\cdot\frac{u^2}{2}$. Congiunga con questa la forza viva del semielastro CD,[1] ed ho la forza viva dell'elastro CDE
$= m\cdot\frac{56}{3}\overline{S.\varphi}^2+\frac{2}{3}\overline{C.\varphi}^2\cdot\frac{u^2}{2}$. E giacchè la forza viva dell'elastro ABC
$=\frac{m}{3}\cdot\overline{1+7\overline{S.\varphi}^2+\overline{C.\varphi}^2}\cdot\frac{u^2}{2}$ avremo la forza viva dell'elastro doppio ABCDE
$=\frac{m}{3}\cdot\overline{1+63\overline{S.\varphi}^2+3\overline{C.\varphi}^2}\cdot\frac{u^2}{2} = \frac{m}{3}\cdot\overline{4+60\overline{S.\varphi}^2}\cdot\frac{u^2}{2}$
$=\frac{4m}{3}\cdot\overline{1+15\overline{S.\varphi}^2}\cdot\frac{u^2}{2}$. Facendo la massa dell'elastro doppio $= 4.m = M$, e la velocità del punto $E = 4u\,S.\varphi = U$ onde si abbia $u=\frac{U}{4\,S.\varphi}$, ed $u^2=\frac{U^2}{16\,\overline{S.\varphi}^2}$;
effettuate le sostituzioni, troveremo la prodotta forza viva
$\frac{M}{3}\cdot\frac{1+15\overline{S.\varphi}^2}{16\,\overline{S.\varphi}^2}\cdot\frac{U^2}{2} = \frac{M}{48}\cdot\overline{\frac{1}{\overline{S.\varphi}^2}+15}\cdot\frac{U^2}{2}$
Dotto che sia retto l'angolo $BAC=\varphi$, ne proverrà come sopra, la forza viva $=\frac{M}{3}\cdot\frac{U^2}{2}$.
Se φ si uguagli all'angolo del triangolo equilatero, avremo $S.\varphi=\frac{\sqrt{3}}{2}$, e quindi la detta forza $=\frac{M}{48}\cdot\overline{\frac{4}{3}+15}\cdot\frac{U^2}{2}$

[1] $= m\cdot\frac{19}{3}\overline{S.\varphi}^2+\frac{1}{3}\overline{C.\varphi}^2\cdot\frac{u^2}{2}$

Ponendo

Ponendo φ semiretto, onde $S\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$, ci si presenta la nuova forza $= \frac{M}{4\cdot 8}\cdot 17\cdot\frac{u^2}{2}$

E per avere la forza viva $= \frac{Mu^2}{2}$ sarebbe d'uopo, che fosse $S.\varphi = \frac{1}{\sqrt{33}}$ e per conseguenza $\frac{1}{S.\varphi^2} = 33$.

L'elastro triplo sarebbe fornito della forza viva $\frac{M}{3\cdot 36}\cdot\overline{\frac{1}{S\varphi^2}+35}\cdot\frac{u^2}{2}$, e generalmente dinotando n il numero degli elastri si avrebbe la nuova forza:

$$\frac{M}{12n^2}\cdot\overline{\frac{1}{S\varphi^2}+4n^2-1}\cdot\frac{u^2}{2}$$

Alla quale è facile da cavare la conseguenza, che quando $n = \infty$, sarà la forza viva $= \frac{M}{3}\cdot\frac{u^2}{2}$ come nella ipotesi di φ retto.